



European  
co-operation for  
Accreditation

---

*Numer  
publikacji*

**EA-4/02 M:2021**

---

# Ocena niepewności pomiaru przy wzorcowaniu

## **CEL**

Niniejszy dokument opracowano w celu harmonizacji **oceny** niepewności pomiaru w EA, ustanowienia szczególnych wymagań, w dodatku do ogólnych wymagań EA, dotyczących przedstawiania niepewności pomiaru w świadectwach wzorcowania wydawanych przez akredytowane laboratoria oraz wspierania jednostek akredytujących w jednolitym określaniu zdolności pomiarowej CMC akredytowanych przez nie laboratoriów wzorcujących. Zasady przedstawione w niniejszym dokumencie są zgodne z polityką ILAC dotyczącą niepewności pomiaru przy wzorcowaniu oraz zaleceniami określonymi w *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, a wdrożenie dokumentu EA-4/02 także wspomogą na całym świecie akceptację wyników pomiarów uzyskanych w Europie.

### **Zmiany od ostatniej edycji**

Niniejsze wydanie EA-4/02 zawiera drobne wyjaśnienia i ulepszenia, korektę drobnych błędów, odniesienia do ISO/IEC 17025:2017 oraz włączenie załącznika dotyczącego zasad podejmowania decyzji.

### **Autorstwo**

Publikacja została przygotowana przez grupę roboczą Komitetu EA ds. Laboratoriów.

### **Język oficjalny**

Niniejsza publikacja może być przetłumaczona na inne języki, w razie takiej potrzeby. Angielska wersja językowa jest wersją rozstrzygającą.

### **Prawa autorskie**

Właścicielem praw autorskich do niniejszego tekstu jest EA. Tekst ten nie może być kopiowany w celu sprzedaży.

### **Dalsze informacje**

Dalsze informacje o niniejszej publikacji można uzyskać od krajowej jednostki akredytującej – członka EA. Lista członków EA jest opublikowana na stronach internetowych:

<http://www.european-accreditation.org/>

**Kategoria:** Dokumenty aplikacyjne oraz dokumenty doradztwa technicznego dla jednostek oceniających zgodność

**EA-4/02 jest dokumentem obowiązkowym**

**Data zatwierdzenia:** 5 listopada 2021 r.

**Data wdrożenia:** Bezzwłocznie

**Okres przejściowy** Brak

---

### **Uzupełnienie Polskiego Centrum Akredytacji**

*Oryginał dokumentu:*

*EA-4/02 Evaluation of the Uncertainty of Measurement in Calibration;  
November 2021 rev02*

*Tłumaczenie wykonano w Polskim Centrum Akredytacji, 30.12.2021 r.*

[www.pca.gov.pl](http://www.pca.gov.pl)

*Tekst tłumaczenia nie może być kopiowany w celu sprzedaży.*

---

**SPIS TREŚCI**

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1   | WPROWADZENIE .....  | 4  |
| 2   | OPIS I DEFINICJE .....  | 4  |
| 3   | OCENA NIEPEWNOŚCI POMIARU ESTYMAT WIELKOŚCI WEJŚCIOWYCH.....  | 6  |
| 4   | OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI STANDARDOWEJ ESTYMATY WIELKOŚCI<br>WYJŚCIOWEJ .....  | 9  |
| 5   | NIEPEWNOŚĆ POMIARU ROZSZERZONA.....   | 12 |
| 6   | SZCZEGÓŁOWA PROCEDURA OBLICZANIA NIEPEWNOŚCI POMIARU.....   | 13 |
| 7   | BIBLIOGRAFIA .....  | 13 |
|     | ZAŁĄCZNIK A.....  | 15 |
|     | ZAŁĄCZNIK B.....  | 16 |
|     | ZAŁĄCZNIK C.....  | 18 |
|     | ZAŁĄCZNIK D.....  | 19 |
|     | ZAŁĄCZNIK E.....  | 22 |
|     | ZAŁĄCZNIK F.....  | 24 |
|     | SUPLEMENT 1 .....   | 26 |
| S1  | WPROWADZENIE .....  | 27 |
| S2  | WZORCOWANIE WZORCA MASY O WARTOŚCI NOMINALNEJ 10 kg.....  | 28 |
| S3  | WZORCOWANIE REZYSTORA WZORCOWEGO O REZYSTANCJI NOMINALNEJ<br>10 k $\Omega$ .....  | 31 |
| S4  | WZORCOWANIE PŁYTKI WZORCOWEJ O DŁUGOŚCI NOMINALNEJ 50 mm ...  | 34 |
| S5  | WZORCOWANIE TERMOELEMENTU TYPU N W TEMPERATURZE 1000°C.....   | 38 |
| S6  | WZORCOWANIE CZUJNIKA MOCY PRZY CZĘSTOTLIWOŚCI 19 GHz.....   | 43 |
| S7  | WZORCOWANIE WSPÓŁOSIOWEGO TŁUMIKA NASTAWNEGO O SKOKOWEJ<br>REGULACJI TŁUMIENIA DLA NASTAWY 30 dB (STRATY PRZYROSTOWE) ..... | 47 |
|     | SUPLEMENT 2 .....   | 51 |
| S8  | WPROWADZENIE .....  | 52 |
| S9  | WZORCOWANIE RĘCZNEGO MULTIMETRU CYFROWEGO DLA NAPIĘCIA<br>100 V.....  | 55 |
| S10 | WZORCOWANIE SUWMIARKI Z NONIUSZEM.....  | 60 |
| S11 | WZORCOWANIE KALIBRATORA TEMPERATURY W TEMPERATURZE 180°C .  | 65 |
| S12 | WZORCOWANIE WODOMIERZA PRZEZNACZONEGO DO UŻYTKU<br>W GOSPODARSTWIE DOMOWYM.....   | 69 |
| S13 | WZORCOWANIE PIERŚCIENIA WZORCOWEGO O ŚREDNICY NOMINALNEJ<br>90 mm .....   | 74 |

## 1 WPROWADZENIE

1.1 Niniejszy dokument przedstawia zasady i wymagania dotyczące oceny niepewności pomiaru przy wzorcowaniu oraz sposób podawania tej niepewności w świadectwach wzorcowania zgodnie z polityką ILAC dotyczącą niepewności przy wzorcowaniu jak określono w dokumencie ILAC-P14 (dokument [5]). Dokumenty ILAC-P14 i EA-4/02 są obowiązkowe dla jednostek akredytujących – członków EA. Niniejszy dokument został sformułowany na poziomie ogólnym, aby umożliwić jego zastosowanie we wszystkich dziedzinach wzorcowania. Opisaną metodę można w razie potrzeby uzupełnić szczegółowymi zaleceniami dla różnych dziedzin pomiarowych. Opracowując takie uzupełniające wytyczne należy przestrzegać podstawowych zasad podanych w niniejszym dokumencie w celu zapewnienia harmonizacji pomiędzy różnymi dziedzinami.

1.2 Koncepcja niniejszego dokumentu jest zgodna z publikacją JCGM 100:2008 *Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of uncertainty in measurement (GUM 1995 with minor corrections)*. Dokument ten został przygotowany przez Joint Committee for Guide in Metrology, w którym uczestniczą BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP oraz OIML (dokument [1]). O ile dokument [1] ustanawia ogólne zasady oceny i wyrażania niepewności pomiaru, które mogą być stosowane dla większości pomiarów fizycznych, niniejszy dokument koncentruje się na metodach najbardziej odpowiednich dla pomiarów wykonywanych w laboratoriach wzorcujących oraz opisuje jednoznaczny i zharmonizowany sposób oceny i dokumentowania niepewności pomiaru. Jednakże akceptowalne są inne rozwiązania zaproponowane w Przewodniku GUM i jego suplementach (jak na przykład metoda Monte Carlo). Niniejszy dokument obejmuje następujące tematy:

- definicje istotne dla dokumentu,
- metody oceny niepewności pomiaru wielkości wejściowych **w modelu pomiaru**,
- związek pomiędzy niepewnością pomiaru wielkości wyjściowej oraz wyznaczonej niepewności pomiaru wielkości wejściowych,
- niepewność pomiaru rozszerzoną wielkości wyjściowej **w modelu pomiaru**,
- **przedstawianie** niepewności pomiaru,
- szczegółową procedurę obliczania niepewności pomiaru.

Ocena niepewności przy wzorcowaniu jest także przedstawiona w opracowanych przez EURAMET dokumentach zawierających wytyczne dotyczące wzorcowania, które są dostępne na stronach [www.euramet.org](http://www.euramet.org).

## 2 OPIS I DEFINICJE

Uwaga: Terminy mające istotne znaczenie dla głównego tekstu, a występujące w niniejszym dokumencie po raz pierwszy, są wytłuszczone. Załącznik B zawiera słownik terminów wraz z dokumentami odniesienia.

2.1 Podany wynik pomiaru tylko wtedy jest kompletny, gdy zawiera zarówno wartość mierzand, jak i niepewność pomiaru, związaną z tą wartością. W niniejszym dokumencie wszystkie wielkości, których wartości nie są dokładnie znane, będą traktowane jako **zmienne losowe**; dotyczy to również wszystkich wielkości wpływających, które mogą oddziaływać na wartość mierzand.

2.2 **Niepewność pomiaru** jest nieujemnym parametrem związanym z wynikiem pomiaru, charakteryzującym rozrzut wartości, które można w sposób uzasadniony przypisać

mezurandowi (dokument [3]). W niniejszym dokumencie zamiast terminu **niepewność pomiaru** używany będzie skrót **niepewność**, o ile nie będzie wiązało się z nim ryzyko nieporozumienia. Typowe źródła niepewności w pomiarach przedstawiono w wykazie znajdującym się w Załączniku C.

- 2.3** **Mezurandy** są tymi szczególnymi wielkościami, które mają być zmierzone. Przy wzorcowaniu mamy zwykle do czynienia tylko z jednym mezurandem, nazywanym również **wielkością wyjściową**  $Y$ , który zależy od pewnej liczby **wielkości wejściowych**  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) zgodnie z zależnością funkcyjną

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (2.1)$$

**Funkcja pomiaru  $f$  reprezentuje funkcję wielkości wejściowych, która po obliczeniu przy użyciu znanych wartości wielkości wejściowych jest zmierzoną wartością wielkości wyjściowej.**

Podaje ona, jak z wartości wielkości wejściowych  $X_i$  otrzymuje się wartość wielkości wyjściowej  $Y$ . W większości przypadków będzie ona pojedynczym wyrażeniem analitycznym, może być jednak również zbiorem takich wyrażen, zawierających poprawki i współczynniki poprawkowe oddziaływań systematycznych, prowadząc w ten sposób do bardziej złożonej zależności, której nie można wyrazić za pomocą pojedynczej funkcji. Funkcję  $f$  można określić również eksperymentalnie lub może być podana tylko w formie algorytmu komputerowego, który musi być wyznaczony numerycznie albo może być kombinacją wszystkich wyżej wymienionych form.

- 2.4** **Zbiór niezależnych** wielkości wejściowych  $X_i$  może być podzielony na dwie kategorie, w **zależności** od sposobu, w jaki zostały określone wartości tych wielkości i związane z nimi niepewności:
- wielkości, których estymaty oraz związane z nimi niepewności wyznaczone są bezpośrednio z pomiaru. Wartości te można uzyskać np. z pojedynczej obserwacji, powtarzanych obserwacji albo na podstawie oceny opartej na doświadczeniu. Mogą one obejmować wyznaczanie poprawek wskazań przyrządu, jak również poprawek wynikających z wielkości wpływających, jak: temperatura otoczenia, ciśnienie atmosferyczne lub wilgotność;
  - wielkości, których estymaty oraz związane z nimi niepewności są wprowadzane do funkcji pomiaru ze źródeł zewnętrznych, jak np.: wielkości związane z wywzorcowanymi wzorcami pomiarowymi, certyfikowanymi materiałami odniesienia lub danymi odniesienia otrzymanymi z literatury specjalistycznej.

**Jeżeli wielkości wejściowe nie są niezależne, patrz punkt 4.6.**

- 2.5** Estymatę mezurandu  $Y$ , oznaczoną  $y$ , nazwaną **estymatą wielkości wyjściowej**, otrzymuje się z równania (2.1) poprzez podstawienie **estymat wielkości wejściowych**  $x_i$  w miejsce wartości wielkości wejściowych  $X_i$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (2.2)$$

Przyjmuje się, że wartości wejściowe są najlepszymi estymatami wielkości wejściowych, które zostały odpowiednio skorygowane z uwzględnieniem wszystkich istotnych oddziaływań dla danego modelu pomiaru. W przeciwnym przypadku do modelu matematycznego pomiaru należy wprowadzić odpowiednie poprawki jako osobne wielkości wejściowe.

- 2.6** Miarą rozrzutu wartości przypisanych wielkości mierzonej, traktowanych jako zmienna losowa, jest **wariancja** ich rozkładu lub jej dodatni pierwiastek kwadratowy, nazywany **odchyleniem standardowym**. **Standardowa niepewność pomiaru** związana z estymatą wielkości wyjściowej lub wynikiem pomiaru, oznaczona  $u(y)$ , jest odchyleniem standardowym mezurandu  $Y$ . Określa się ją na podstawie estymat  $x_i$  wielkości wejściowych  $X_i$  oraz na podstawie związanych z nimi niepewności standardowych  $u(x_i)$ .

Niepewność standardowa związana z estymatą ma **jednostkę identyczną z jednostką** tej estymaty.

W niektórych przypadkach uzasadnione jest stosowanie **względnej standardowej niepewności pomiaru**; jest to, związana z estymatą, niepewność standardowa pomiaru podzielona przez wartość tej estymaty, a więc wielkość bezwymiarowa. Nie można jej stosować, gdy wartość estymaty jest równa zero.

### 3 OCENA NIEPEWNOŚCI POMIARU ESTYMAT WIELKOŚCI WEJŚCIOWYCH

#### 3.1 Rozważania ogólne

- 3.1.1 Niepewność pomiaru związana z estymatami wielkości wejściowych jest **oceniana** metodą typu A lub metodą typu B. **Metoda typu A oceny niepewności standardowej** jest metodą **oceny** niepewności za pomocą analizy statystycznej serii obserwacji. Niepewność standardowa jest w tym przypadku odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej otrzymanej metodą uśredniania lub odpowiednią analizą regresji. **Metoda typu B oceny niepewności standardowej** jest metodą oceny niepewności w inny sposób niż za pomocą analizy statystycznej serii obserwacji. W takim przypadku **ocena** niepewności standardowej oparta jest na innego rodzaju przesłankach naukowych.

Uwaga: Istnieją przypadki – rzadko odnoszące się do wzorcowania – gdy wszystkie możliwe wartości wielkości lokują się po jednej stronie pojedynczej wartości ograniczającej. Znanym tego rodzaju przypadkiem jest tzw. błąd cosinusa. Sposób postępowania w tym szczególnym przypadku jest przedstawiony w dokumencie odniesienia [1].

#### 3.2 Metoda typu A oceny niepewności standardowej

- 3.2.1 Metodę typu A **oceny** niepewności standardowej stosuje się wtedy, gdy istnieje możliwość przeprowadzenia w takich samych warunkach pomiarowych, wielu niezależnych obserwacji jednej z wielkości wejściowych. Jeżeli rozdzielczość procesu pomiarowego jest wystarczająca, otrzymane wyniki charakteryzuje zauważalny rozrzut.
- 3.2.2 Zakładamy, że mierzoną w warunkach powtarzalności wielkością wejściową  $X_i$  jest wielkość  $Q$ . Dla  $n$  niezależnych statystycznie obserwacji ( $n > 1$ ), estymata wielkości wejściowej  $Q$  oznaczona  $\bar{q}$  jest **średnią arytmetyczną** lub **wartością przeciętną** pojedynczych obserwowanych wartości  $q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_j \quad (3.1)$$

Niepewność standardowa związana z estymatą  $\bar{q}$  jest **oceniana** za pomocą jednej z następujących metod:

- (a) estymata wariancji określonego rozkładu prawdopodobieństwa jest **wariancją eksperymentalną**  $s^2(q)$  wartości  $q_j$  wyrażoną równaniem

$$s^2(q) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2 \quad (3.2)$$

Jej (dodatni) pierwiastek kwadratowy jest nazywany **odchyleniem standardowym eksperymentalnym**. Najlepszą estymatą wariancji średniej arytmetycznej  $\bar{q}$  jest **wariancja eksperymentalna średniej**

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q)}{n} \quad (3.3)$$

Jej (dodatni) pierwiastek kwadratowy jest nazywany **odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej**. Niepewność standardowa  $u(\bar{q})$  związana z estymatą wejściową  $\bar{q}$  jest odchyleniem standardowym eksperymentalnym średniej

$$u(\bar{q}) = s(\bar{q}) \quad (3.4)$$

Uwaga: Jeżeli liczba  $n$  powtórzonych pomiarów jest mała ( $n < 10$ ), niezbędne jest rozważenie wiarygodności metody typu A **oceny** niepewności standardowej zgodnie z równaniem (3.4). Jeżeli nie można zwiększyć liczby obserwacji, to należy rozważyć możliwość zastosowania innych, niżej przedstawionych metod **oceny** niepewności standardowej.

- (b) Dla pomiaru dobrze zdefiniowanego, przeprowadzonego pod kontrolą statystyczną, możliwe jest określenie złożonej lub **połączonej estymaty wariancji**  $s_p^2$ , która lepiej charakteryzuje rozproszenie wyników niż oszacowane odchylenie standardowe, wyznaczone z ograniczonej liczby obserwacji. Jeżeli w takim przypadku wartość wielkości wejściowej  $Q$  jest określona jako średnia arytmetyczna  $\bar{q}$  małej liczby  $n$  niezależnych obserwacji, to wariancję średniej można oszacować z równania

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s_p^2}{n} \quad (3.5)$$

Stosując równanie (3.4) wyprowadza się z tej wartości niepewność standardową.



### 3.3 Metoda typu B oceny niepewności standardowej

3.3.1 **Ocena** niepewności standardowej metodą typu B jest **oceną** niepewności związanej z estymatą  $x_i$  wielkości wejściowej  $X_i$  w inny sposób niż za pomocą analizy statystycznej serii obserwacji. Niepewność standardowa  $u(x_i)$  jest **oceniana** za pomocą analizy naukowej opartej na wszystkich dostępnych informacjach nt. możliwej zmienności  $X_i$ . W tej kategorii informacji mogą znajdować się:

- dane uzyskane z wcześniej przeprowadzonych pomiarów,
- posiadane doświadczenie lub ogólna znajomość zachowania się i właściwości odpowiednich materiałów i przyrządów pomiarowych,
- specyfikacje producenta,
- dane uzyskane ze świadectw wzorcowania i z innych certyfikatów,
- niepewności związane z danymi odniesienia, uzyskane z podręczników.

3.3.2 Właściwe zastosowanie dostępnych informacji służących do **oceny** niepewności standardowej metodą typu B wymaga wnikliwości opartej o doświadczenie oraz wiedzę ogólną. Jest to umiejętność zdobywana podczas praktyki pomiarowej. Dobrze uzasadniona **ocena** niepewności standardowej metodą typu B jest równie wiarygodna jak ocena jej metodą typu A, zwłaszcza w sytuacjach pomiarowych, gdzie **ocena** niepewności standardowej metodą typu A opiera się na stosunkowo małej liczbie statystycznie niezależnych obserwacji. Należy rozróżniać następujące przypadki:

- (a) Jeżeli znana jest tylko **pojedyncza wartość** wielkości  $X_i$ , np. jedyna wartość zmierzona, wartość otrzymana z wcześniejszego pomiaru, wartość odniesienia z literatury lub poprawka, to taką wartość należy przyjąć dla  $x_i$ . Jeżeli podana jest niepewność standardowa  $u(x_i)$  związana z wartością  $x_i$ , to należy ją zastosować. W przeciwnym razie niepewność standardową należy obliczać z jednoznacznych danych. Jeżeli nie można zwiększyć liczby obserwacji, należy uwzględnić inne podejście do szacowania niepewności standardowej podane w punkcie b).
- (b) Jeżeli dla wielkości  $X_i$  można w oparciu o dane teoretyczne lub eksperymentalne założyć określony **rozkład prawdopodobieństwa**, to jako estymatę  $x_i$  tej wielkości należy przyjąć odpowiednią wartość oczekiwaną, a pierwiastek kwadratowy wariancji takiego rozkładu – jako związaną z nią niepewność standardową  $u(x_i)$ .
- (c) Jeżeli dla wartości wielkości  $X_i$  można oszacować jedynie jej **górną granicę  $a_+$**  i **dolną granicę  $a_-$**  (np. podana przez producenta specyfikacja przyrządu pomiarowego, zakres zmienności temperatury, błąd wynikający z zaokrąglania lub odcinania miejsc dziesiętnych na skutek automatycznej obróbki danych), to dla zmienności wielkości wejściowej  $X_i$  w przedziale pomiędzy obu wartościami granicznymi należy przyjąć stały rozkład prawdopodobieństwa (rozkład prostokątny). Dla podanego powyżej przypadku (b) estymatę wielkości wejściowej  $X_i$  można wyrazić równaniem

$$x_i = \frac{1}{2}(a_+ + a_-) \quad (3.6)$$

a jej wariancję równaniem

$$u^2(x_i) = \frac{1}{12}(a_+ - a_-)^2 \quad (3.7)$$

jako kwadrat niepewności standardowej. Jeżeli różnica pomiędzy wartościami granicznymi wynosi  $2a$ , równanie (3.7) przybiera postać



$$u^2(x_i) = \frac{1}{3} a^2 \quad (3.8)$$

Przyjęcie prostokątnego rozkładu prawdopodobieństwa wielkości wejściowej  $X_i$  jest uzasadnione, jeżeli znamy tylko granice jej zmienności. Jeżeli natomiast wiadomo, że wartości danej wielkości znajdujące się w pobliżu środka przedziału zmienności są bardziej prawdopodobne niż wartości znajdujące się w pobliżu jej granic, to lepszym modelem będzie rozkład trójkątny lub rozkład normalny. Natomiast gdy bardziej prawdopodobne są wartości znajdujące się w pobliżu granic niż wartości ze środka przedziału zmienności, bardziej odpowiedni może być rozkład o kształcie litery U. Ocena niepewności w tych przypadkach jest przedstawiona w dokumencie odniesienia [1] i w przykładach suplementów S4 i S13.

#### 4 OBLICZANIE NIEPEWNOŚCI STANDARDOWEJ ESTYMATY WIELKOŚCI WYJŚCIOWEJ

4.1 Dla nieskorelowanych wielkości wejściowych kwadrat niepewności standardowej związanej z estymatą wielkości wyjściowej  $y$  jest określony wyrażeniem

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) \quad (4.1)$$

Wielkość  $u_i(y)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) jest składnikiem niepewności standardowej związanej z estymatą  $y$  wielkości wyjściowej wynikającą z niepewności standardowej związanej z estymatą  $x_i$  wielkości wejściowej

$$u_i(y) = c_i u(x_i) \quad (4.2)$$

gdzie  $c_i$  jest **współczynnikiem wrażliwości** związanym z estymatą  $x_i$  wielkości wejściowej, tzn. jest pochodną cząstkową funkcji pomiaru  $f$  względem  $X_i$ , wyznaczoną dla estymaty  $x_i$  wielkości wejściowej

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{X_1=x_1 \dots X_N=x_N} \quad (4.3)$$

Uwaga: W praktyce pomiarowej można spotkać przypadki, rzadko odnoszące się do wzorcowania, w których funkcja pomiaru jest silnie nieliniowa lub gdy „znikają” niektóre współczynniki wrażliwości [patrz równania (4.2) i (4.3)] i do równania (4.1) trzeba wprowadzić człony wyższego rzędu. Takie szczególne przypadki są rozpatrywane w dokumencie odniesienia [1].

4.2 Współczynnik wrażliwości  $c_i$  opisuje, w jakim stopniu zmiany estymaty  $x_i$  wielkości wejściowej  $X_i$  wpływają na estymatę wielkości wyjściowej  $y$ . Można go wyznaczyć z funkcji pomiaru  $f$  za pomocą równania (4.3) lub metodami numerycznymi, tzn. poprzez obliczenie zmiany estymaty  $y$  wielkości wyjściowej spowodowanej zmianą estymaty  $x_i$  wielkości wejściowej o  $+u(x_i)$  i  $-u(x_i)$ , a następnie dla otrzymania wartości  $c_i$  podzielenie otrzymanej różnicy wartości  $y$  przez  $2u(x_i)$ . Czasami stosowniejsze może być eksperymentalne określenie zmiany estymaty  $y$  wielkości wyjściowej poprzez powtarzanie pomiaru dla np.  $x_i \pm u(x_i)$ .

**4.3** Podczas gdy wartość  $u(x_i)$  jest zawsze dodatnia, wartość  $u_i(y)$  może być, w zależności od znaku współczynnika wrażliwości  $c_i$  (zgodnie z równaniem (4.2)), albo dodatnia albo ujemna. W przypadku skorelowanych wielkości wejściowych należy uwzględnić znak  $u_i(y)$  (patrz równanie (D.4) w Załączniku D).

**4.4** Jeżeli funkcja pomiaru  $f$  jest **kombinacją liniową** wielkości wejściowych  $X_i$  z mnożnikami  $p_i$ :

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N p_i X_i \quad (4.4)$$

to, zgodnie z równaniem (2.2), estymata wielkości wyjściowej jest odpowiednią **kombinacją liniową** estymat wielkości wejściowych

$$y = \sum_{i=1}^N p_i x_i \quad (4.5)$$

Współczynniki wrażliwości są wtedy równe  $p_i$  i równanie (4.1) przyjmuje postać

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 u^2(x_i) \quad (4.6)$$

**4.5** Jeżeli funkcja pomiaru  $f$  jest iloczynem lub ilorazem wielkości wejściowych  $X_i$  podniesionych do potęg  $p_i$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_N) = c \prod_{i=1}^N X_i^{p_i} \quad (4.7)$$

to estymata wielkości wyjściowej jest odpowiednim iloczynem lub ilorazem estymat wielkości wejściowych

$$y = c \prod_{i=1}^N X_i^{p_i} \quad (4.8)$$

W tym przypadku współczynniki wrażliwości są równe  $p_i y/x_i$  i przy zastosowaniu względnych niepewności standardowych  $w(y) = u(y)/|y|$  oraz  $w(x_i) = u(x_i)/|x_i|$ , z równania (4.1) otrzymuje się wyrażenie analogiczne do równania (4.6)

$$w^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 w^2(x_i) \quad (4.9)$$

**4.6** Jeżeli dwie wielkości wejściowe  $X_i$  i  $X_k$  są w pewnym stopniu **skorelowane**, tzn. są one wzajemnie zależne, to również ich **kowariancję** należy rozpatrywać jako składową niepewności. W Załączniku D przedstawiono sposób, jak należy to zrobić. Możliwość uwzględnienia wpływu korelacji zależy od znajomości pomiaru oraz od wzajemnej oceny zależności wielkości wejściowych. Należy pamiętać, że nieuwzględnienie istniejącej korelacji pomiędzy wielkościami wejściowymi może prowadzić do **błędnej oceny** niepewności standardowej mezurandu.

**4.7** Kowariancję związaną z estymatami dwóch wielkości wejściowych  $X_i$  i  $X_k$  można uznać za równą zero lub za nieistotną, jeżeli:

- a) obie wielkości wejściowe  $X_i$  i  $X_k$  są wzajemnie niezależne np. były kilkakrotnie, ale nie jednocześnie, obserwowane podczas różnych, wzajemnie niezależnych eksperymentów, lub są wielkościami wynikowymi różnych oszacowań, które zostały wykonane niezależnie, lub jeśli
- b) każdą z wielkości wejściowych  $X_i$  i  $X_k$  można rozpatrywać jako stałą, lub jeśli
- c) badania nie dają żadnych informacji wskazujących na istnienie korelacji pomiędzy wielkościami wejściowymi  $X_i$  i  $X_k$ .

Czasami korelacje można wyeliminować poprzez wybór odpowiedniej funkcji matematycznego modelu pomiaru. **Zobacz na przykład Załącznik D, pkt. D.6.**

**4.8** Analiza niepewności pomiaru – często nazywana również budżetem niepewności pomiaru – powinna zawierać listę wszystkich źródeł niepewności występujących podczas pomiaru wraz z przypisanymi im niepewnościami standardowymi, jak również metodami ich **oceny**. W przypadku pomiarów powtarzanych należy podać również liczbę  $n$  tych obserwacji. W celu zapewnienia przejrzystości zalecane jest przedstawienie danych istotnych dla tej analizy w formie tabeli. Wszystkie wielkości w tabeli należy przedstawić w formie symboli fizycznych  $X_i$  lub skrótowego znaku identyfikacyjnego. Dla każdej wielkości w tabeli powinny być wyspecyfikowane co najmniej: estymata  $x_i$ , związana z nią niepewność standardowa  $u(x_i)$ , współczynnik wrażliwości  $c_i$  oraz różne składniki niepewności  $u_i(y)$ . Wartości liczbowe każdej wielkości powinny być podane w tabeli wraz z odpowiednimi jednostkami miary.

**4.9** Przykład takiego układu dla nieskorelowanych wielkości wejściowych przedstawiono w Tabeli 4.1. Znajdująca się w dolnym prawym rogu tabeli niepewność standardowa  $u(y)$ , związana z wynikiem pomiaru, jest pierwiastkiem sumy kwadratów wszystkich składników niepewności znajdujących się w prawej, skrajnej kolumnie tabeli. Szare pola w tabeli pozostają puste.

Tabela 4.1: Schemat uporządkowanego układu zawierającego: symbole wielkości, estymaty wielkości, niepewności standardowe, współczynniki wrażliwości oraz udziały składowych niepewności zastosowane w analizie niepewności pomiaru.

| Symbol wielkości | Estymata wielkości | Niepewność standardowa | Rozkład prawdopodobieństwa          | Współczynnik wrażliwości | Udział niepewności |
|------------------|--------------------|------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------|
| $X_i$            | $x_i$              | $u(x_i)$               |                                     | $c_i$                    | $u_i(y)$           |
| $X_1$            | $x_1$              | $u(x_1)$               | <i>Rozkład prawdopodobieństwa 1</i> | $c_1$                    | $u_1(y)$           |
| $X_2$            | $x_2$              | $u(x_2)$               | <i>Rozkład prawdopodobieństwa 2</i> | $c_2$                    | $u_2(y)$           |
| :                | :                  | :                      |                                     | :                        | :                  |
| $X_N$            | $x_N$              | $u(x_N)$               | <i>Rozkład prawdopodobieństwa N</i> | $c_N$                    | $u_N(y)$           |
| $Y$              | $y$                |                        |                                     |                          | $u(y)$             |

## 5 NIEPEWNOŚĆ POMIARU ROZSZERZONA

- 5.1 W EA postanowiono, że laboratoria wzorcujące akredytowane przez członków EA będą podawać **niepewność pomiaru rozszerzoną**  $U$ , uzyskaną z pomnożenia niepewności standardowej  $u(y)$  estymaty wielkości wyjściowej  $y$  przez **współczynnik rozszerzenia**  $k$ :

$$U = k \cdot u(y) \quad (5.1)$$

W przypadkach, gdy rozkład mezurandu można scharakteryzować rozkładem normalnym (**Gaussa**), a niepewność standardowa związana z estymatą wielkości wyjściowej jest wystarczająco wiarygodna, należy standardowo stosować współczynnik rozszerzenia  $k = 2$ . Taka przypisana rozszerzona niepewność pomiaru odpowiada **prawdopodobieństwu rozszerzenia** wynoszącemu około 95 %. Warunki te są spełnione w większości przypadków występujących przy wzorcowaniu.

- 5.2 Nie zawsze łatwo jest eksperymentalnie potwierdzić słuszność przyjęcia rozkładu normalnego. Jednakże w przypadkach, w których kilka (tzn.  $N \geq 3$ ) składowych niepewności, otrzymanych przy założeniu określonych rozkładów prawdopodobieństwa wielkości niezależnych, np. rozkładów normalnych lub prostokątnych, ma porównywalny co do wartości udział w niepewności standardowej związanej z estymatą wielkości wyjściowej, to spełnione są warunki centralnego twierdzenia granicznego, tak że z bardzo dobrym przybliżeniem można przyjąć, iż rozkład wielkości wyjściowej jest rozkładem normalnym.
- 5.3 Wiarygodność niepewności standardowej związanej z estymatą wielkości wyjściowej jest określana za pomocą jej efektywnych stopni swobody (patrz Załącznik E). Jednakże kryterium wiarygodności jest zawsze spełnione, jeżeli wszystkie składowe niepewności otrzymane metodą **oceny** typu A zostały obliczone na podstawie co najmniej dziesięciu powtórzonych obserwacji.
- 5.4 Jeżeli jeden z ww. warunków nie został spełniony (o rozkładzie normalnym lub wystarczającej wiarygodności), może okazać się, że niepewność rozszerzona, otrzymana przy standardowym współczynniku rozszerzenia  $k = 2$ , odpowiada prawdopodobieństwu rozszerzenia mniejszemu niż 95 %. W takich przypadkach, aby zapewnić podobne prawdopodobieństwo rozszerzenia, jak dla rozkładu normalnego, do wyznaczenia wartości niepewności rozszerzonej należy zastosować inną procedurę. Stosowanie w przybliżeniu identycznego prawdopodobieństwa rozszerzenia ma znaczenie, gdy porównywane są wyniki pomiarów takiej samej wielkości, np. przy ocenie wyników porównań międzylaboratoryjnych lub podczas oceny zgodności ze specyfikacją.
- 5.5 Nawet gdy przyjęcie rozkładu normalnego jest uzasadnione, może okazać się, że niepewność standardowa związana z estymatą wielkości wyjściowej nie jest wystarczająco wiarygodna. Jeżeli w takim przypadku nie można zwiększyć liczby  $n$  powtórzonych pomiarów ani zastąpić metody **oceny** typu A (która jest w danym przypadku mniej wiarygodna) metodą typu B, należy zastosować metodę przedstawioną w Załączniku E.
- 5.6 W pozostałych przypadkach, dla których nie można przyjąć założenia o rozkładzie normalnym, konieczne jest zdobycie informacji nt. rzeczywistego rozkładu prawdopodobieństwa estymaty wielkości wyjściowej, w celu określenia wartości współczynnika rozszerzenia  $k$ , który odpowiada prawdopodobieństwu rozszerzenia około 95 %.

W takich przypadkach można zastosować metodę Monte Carlo z Suplementu 1 GUM.

## 6 SZCZEGÓŁOWA PROCEDURA OBLICZANIA NIEPEWNOŚCI POMIARU

- 6.1 Poniżej podano wskazówki dotyczące zastosowania tego dokumentu w praktyce (patrz opracowane przykłady zamieszczone w suplementach), zgodnie z którymi należy:
- Podać matematyczną zależność pomiędzy mezurandem (wielkość wyjściowa)  $Y$  i wielkościami wejściowymi  $X_i$  zgodnie z równaniem (2.1). W przypadku bezpośredniego porównania dwóch wzorców równanie może być bardzo proste, np.  $Y = X_1 + X_2$ .
  - Zidentyfikować i zastosować wszystkie istotne poprawki.
  - W analizie niepewności wymienić wszystkie źródła niepewności zgodnie z punktem 4.
  - Obliczyć niepewność standardową  $u(\bar{q})$  dla wielokrotnie mierzonych wielkości, zgodnie z punktem 3.2.
  - W przypadku pojedynczych wartości, np. wartości uzyskanych podczas wcześniejszych pomiarów, wartości poprawek lub wartości przyjętych z literatury, przyjmując odpowiednią niepewność standardową - jeżeli jest podana lub można ją obliczyć zgodnie z punktem 3.3.2 (a). Jeżeli brak jakichkolwiek danych, z których można obliczyć niepewność standardową, wartość  $u(x_i)$  należy określić na podstawie nabytego doświadczenia naukowego.
  - Dla wielkości wejściowych, których rozkład prawdopodobieństwa jest znany lub można go przyjąć na podstawie istniejących informacji, wartość oczekiwaną  $x_i$  oraz niepewność standardową  $u(x_i)$  obliczyć zgodnie ze sposobem przedstawionym w punkcie 3.3.2 (b). Jeżeli znane są granice górna i dolna przedziału zmienności wielkości wejściowej lub można je oszacować, niepewność standardową  $u(x_i)$  należy obliczyć zgodnie z punktem 3.3.2 (c).
  - Dla każdej wielkości wejściowej  $X_i$  obliczyć składnik  $u_i(y)$  niepewności związanej z estymatą wielkości wyjściowej  $y$  wynikający z estymaty wielkości wejściowej  $x_i$ , zgodnie z równaniami (4.2) i (4.3) oraz zsumować ich kwadraty zgodnie z równaniem (4.1), aby otrzymać kwadrat niepewności standardowej  $u(y)$  mezurandu. Jeżeli wiadomo, że wielkości wejściowe są skorelowane, należy zastosować metodę przedstawioną w Załączniku D.
  - Obliczyć niepewność rozszerzoną  $U$  poprzez pomnożenie niepewności standardowej  $u(y)$  związanej z estymatą wielkości wyjściowej przez współczynnik rozszerzenia  $k$ , wybrany zgodnie z punktem 5.
  - W świadectwach wzorcowania podać wynik pomiaru zawierający estymatę mezurandu  $y$ , związaną z nią niepewność rozszerzoną  $U$  oraz współczynnik rozszerzenia  $k$ , zgodnie z Rozdziałem 6, dokumentu ILAC-P14 (dokument [5]).

**Uwaga:** W niektórych przypadkach o zgodności wyników wzorcowania decyduje porównanie tych wyników ze specyfikacją. Decyzję podejmuje się zgodnie z uzgodnioną zasadą podejmowania decyzji, która określa, jak uwzględniać niepewność pomiaru. Załącznik F zawiera związane wskazówki na ten temat.

## 7 BIBLIOGRAFIA

- [1] JCGM 100:2008 (GUM 1995 with minor corrections), *Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement* (dostępny na stronach [www.bipm.org](http://www.bipm.org)).

- [2] ISO/IEC 17025:2017 *General requirements for the competence of testing and calibration laboratories*
- [3] JCGM 200:2012 *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms* (dostępny na stronach [www.bipm.org](http://www.bipm.org))
- [4] Norma międzynarodowa ISO 3534-1 *Statistics-Vocabulary and symbols – Part 1:General statistical terms and terms used in probability* (ISO 3534-1:2006)
- [5] ILAC-P14:09/2020 *ILAC Policy for Uncertainty in Calibration*
- [6] JCGM 104:2009 *Evaluation of measurement data – An introduction to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” and related documents* (dostępny na stronach [www.bipm.org](http://www.bipm.org))
- [7] JCGM 106 (ISO/IEC Guide 98-4:2012) *Uncertainty of measurement -- Part 4: Role of measurement uncertainty in conformity assessment*
- [8] ILAC G8:2019 *Guidelines on Decision Rules and Statements of Conformity*
- [9] ISO 10576-1:2003 *Statistical methods – Guidelines for the evaluation of conformity with specified requirements*
- [10] ASME B89.7.4.1-2005 *Measurement Uncertainty and Conformance Testing: Risk Analysis*

## ZAŁĄCZNIK A

### Zdolność pomiarowa CMC

Pojęcie **zdolności pomiarowej** CMC<sup>1</sup> zostało dokładnie omówione w dokumencie dotyczącym CMC wydanym 7 września 2007 r. przez grupę roboczą BIPM/ILAC. Dokument ten jest załącznikiem do polityki ILAC dotyczącej niepewności pomiaru przy wzorcowaniu, która jest podstawą zharmonizowanego podejścia do CMC przez akredytowane laboratoria na całym świecie (dokument [5]).

Metody oceny niepewności pomiaru, które są opisane w niniejszym dokumencie, powinny być stosowane przez akredytowane laboratoria przy ustalaniu zdolności pomiarowej CMC.

---

<sup>1</sup> Przypis PCA: *Calibration and Measurement Capability*;



## ZAŁĄCZNIK B

### Słownik niektórych związanych terminów

- B1 średnia arytmetyczna** (dokument [1], punkt C.2.19)  
Średnia; suma wartości podzielona przez ich liczbę.
- B2 zdolność pomiarowa CMC**  
Zdolność pomiarowa CMC jest wyrażona poprzez:
1. mezurand lub materiał odniesienia;
  2. metodę/procedurę wzorcowania/pomiaru i/lub rodzaj przyrządu/materiału podlegającego wzorcowaniu/pomiarowi;
  3. zakres pomiarowy i dodatkowe parametry, jeżeli ma to zastosowanie, np. częstotliwość zastosowanego napięcia;
  4. niepewność pomiaru.
- Pełne wyjaśnienie jest podane w dokumencie [5].
- B3 współczynnik korelacji** (dokument [1], punkt C.3.6)  
Miara względnej wzajemnej zależności dwóch zmiennych losowych, która jest równa stosunkowi kowariancji tych zmiennych losowych do dodatniego pierwiastka kwadratowego iloczynu ich wariancji. Pełny opis jest podany w dokumencie [1].
- B4 kowariancja** (dokument [1], punkt C.3.4)  
Miara wzajemnej zależności dwóch zmiennych losowych, która jest równa wartości oczekiwanej iloczynu odchyleń obu zmiennych losowych od ich wartości oczekiwanych. Cała definicja jest podana w dokumencie [1].
- B5 współczynnik rozszerzenia** (dokument [3], definicja 2.38)  
Liczba większa od jedności, przez którą mnoży się standardową niepewność pomiaru złożoną w celu uzyskania niepewności pomiaru rozszerzonej.
- B6 prawdopodobieństwo rozszerzenia** (dokument [3], definicja 2.37)  
Prawdopodobieństwo, że zbiór prawdziwych wartości wielkości mezurandu zawarty jest w określonym przedziale rozszerzenia.  
Uwaga: termin „wartość prawdziwa” (patrz Załącznik D) nie jest stosowany w niniejszym Przewodniku z powodów przedstawionych w Przewodniku GUM, punkt D.3.5; terminy „wartość mezurandu” (lub wielkości) oraz „wartość prawdziwa mezurandu” (lub wielkości) są uważane za równoważne (Przewodnik GUM, punkt 3.1.1). Patrz także: dokument [6] (JCGM 104:2009)
- B7 odchylenie standardowe eksperymentalne** (dokument [1], punkt 4.2.2)  
Dodatni pierwiastek kwadratowy z wariancji eksperymentalnej.
- B8 niepewność (pomiaru) rozszerzona** (dokument [3], definicja 2.35)  
Iloczyn standardowej niepewności pomiaru złożonej i współczynnika rozszerzenia większego niż jeden.
- B9 wariancja eksperymentalna** (dokument [1], punkt 4.2.2)  
Wielkość charakteryzująca rozrzut wyników w serii  $n$  obserwacji tego samego mezurandu, opisana równaniem (3.2) w tekście.
- B10 estymata wielkości wejściowej** (dokument [1], punkt 4.1.4 oraz C2.26)  
Oszacowana wartość wielkości wejściowej stosowana przy obliczaniu wyniku pomiaru.
- B11 wielkość wejściowa** (dokument [1], punkt 4.1.2)  
Wielkość, od której zależy mezurand i którą uwzględnia się w trakcie obliczania wyniku pomiaru.

- B12** **mezurand** (dokument [3], definicja 2.3)  
Wielkość, która ma być zmierzona.
- B13** **niepewność pomiaru**, niepewność (dokument [3], definicja 2.26)  
Nieujemny parametr charakteryzujący rozproszenie wartości wielkości, przyporządkowany do mezurandu, obliczony na podstawie uzyskanej informacji.
- B14** **estymata wielkości wyjściowej** (dokument [1], punkt 4.1 oraz C.2.26)  
Wynik pomiaru obliczony z estymat wielkości wejściowych za pomocą funkcji pomiaru.
- B15** **wielkość wyjściowa** (dokument [1], punkt 4.1.2)  
Wielkość reprezentująca mezurand przy **ocenie** wyniku pomiaru.
- B16** **połączona estymata wariancji** (dokument [1], punkt 4.2.4)  
Estymata wariancji eksperymentalnej otrzymana z dużych serii obserwacji tego samego mezurandu dla dobrze określonych pomiarów, prowadzonych pod kontrolą statystyczną.
- B17** **rozkład prawdopodobieństwa** (dokument [1], punkt C.2.3)  
Funkcja określająca prawdopodobieństwo, że zmienna losowa przyjmuje daną wartość lub wartość należącą do danego zbioru wartości.
- B18** **zmienna losowa** (dokument [1], punkt C.2.2)  
Zmienna, która przyjmuje dowolne wartości z określonego zbioru i z którą związany jest dany rozkład prawdopodobieństwa.
- B19** **standardowa niepewność pomiaru względna** (dokument [3], definicja 2.32)  
Standardowa niepewność pomiaru dzielona przez bezwzględną wartość wielkości zmierzonej.
- B20** **współczynnik wrażliwości związany z estymatą wielkości wejściowej** (dokument [1], punkt 5.1.3)  
Pochodna cząstkowa opisująca jak estymata wielkości wyjściowej zmienia się wraz ze zmianami wartości estymat wielkości wejściowych.
- B21** **odchylenie standardowe** (dokument [1], punkt C.2.12)  
Dodatni pierwiastek kwadratowy z wariancji.
- B22** **standardowa niepewność pomiaru** (dokument [3], definicja 2.30)  
Niepewność pomiaru wyrażona jako odchylenie standardowe.
- B23** **metoda typu A oceny niepewności pomiaru** (dokument [3], definicja 2.28)  
Oszacowanie wartości składowej niepewności pomiaru za pomocą statystycznej analizy wartości wielkości zmierzonych otrzymanych w zdefiniowanych warunkach pomiaru.
- B24** **metoda typu B oceny niepewności pomiaru** (dokument [3], definicja 2.29)  
Oszacowanie wartości składowej niepewności pomiaru innymi sposobami niż metoda typu A oceny niepewności pomiaru.
- B25** **budżet niepewności** (dokument [3], definicja 2.33)  
Zestawienie niepewności pomiaru, składników tej niepewności pomiaru oraz sposobu ich obliczania i składania.
- B26** **wariancja** (dokument [1], punkt C.2.11)  
Wartość oczekiwana kwadratu zmiennej losowej scentrowanej.

## ZAŁĄCZNIK C

### Źródła niepewności pomiaru

- C1** Niepewność wyniku pomiaru odzwierciedla brak pełnej znajomości wartości mierzand. Pełna znajomość wartości mierzand wymaga nieskończonej ilości informacji. Zjawiska wpływające na niepewność, a tym samym na fakt, że wyniku pomiaru nie można wyrazić za pomocą jedynej wartości, są nazywane źródłami niepewności. W praktyce istnieje wiele możliwych źródeł niepewności pomiaru (dokument [1]), są to m.in.:
- (a) niepełna definicja mierzand;
  - (b) niedoskonała realizacja definicji mierzand;
  - (c) niereprezentatywne pobieranie próbek, tzn. mierzona próbka może nie być reprezentatywna dla zdefiniowanego mierzand;
  - (d) niepełna znajomość wpływu warunków środowiskowych na procedurę pomiarową lub niedoskonały pomiar parametrów charakteryzujących te warunki;
  - (e) subiektywne błędy w odczytywaniu wskazań przyrządów analogowych;
  - (f) ograniczona rozdzielczość lub próg pobudliwości przyrządu;
  - (g) niedokładnie znane wartości przypisane wzorcom i materiałom odniesienia;
  - (h) niedokładnie znane wartości stałych i innych parametrów, otrzymanych ze źródeł zewnętrznych i stosowanych w procedurach przetwarzania danych;
  - (i) upraszczające przybliżenia i założenia stosowane w metodach i procedurach pomiarowych;
  - (j) rozrzut wartości mierzand uzyskanych podczas obserwacji powtarzanych w warunkach pozornie identycznych.
- C2** Źródła te niekoniecznie muszą być niezależne. Niektóre ze źródeł wymienione w punktach od (a) do (i) mogą składać się na źródła wymienione w punkcie (j).
- C3** Większość przykładów w Suplementach 1 i 2 przedstawia sposób postępowania ze składowymi niepewnościami (g), zazwyczaj - wartością i niepewnością wzorców odniesienia, (b), zmianami wartości odniesienia po wzorcowaniu, np. ze względu na dryf lub specyfikację przyrządu, d) niewiadomymi związanymi z wpływami czynników środowiskowych oraz (j) zmiennością odczytów lub uzyskanych wyników częściowych.

## ZAŁĄCZNIK D

## Skorelowane wielkości wejściowe

- D1** Jeżeli wiadomo, że dwie wielkości wejściowe  $X_i$  i  $X_k$  są skorelowane (tzn. jeżeli są w jakiś sposób wzajemnie zależne), to **kowariancję** związaną z obu estymatami  $x_i$  i  $x_k$

$$u(x_i, x_k) = u(x_i)u(x_k)r(x_i, x_k) \quad (i \neq k) \quad (D.1)$$

należy rozpatrywać jako dodatkową składową niepewności. Stopień korelacji określa **współczynnik korelacji**  $r(x_i, x_k)$  (gdzie  $i \neq k$  oraz  $|r| \leq 1$ ).

- D2** W przypadku istnienia  $n$  niezależnych par równocześnie powtarzanych obserwacji dwóch wielkości  $P$  i  $Q$ , kowariancja związana ze średnimi arytmetycznymi  $\bar{p}$  i  $\bar{q}$  opisana jest równaniem

$$s(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (p_j - \bar{p})(q_j - \bar{q}) \quad (D.2)$$

i przez podstawienie  $s$  z równania (D.2) do  $u(x_i, x_k)$  w równaniu (D.1), współczynnik korelacji  $r$  może być obliczony z równania (D.1).

- D3** W przypadku wielkości wpływających korelację można stwierdzić na podstawie praktycznych doświadczeń. Jeżeli znane są korelacje pomiędzy wielkościami wejściowymi i można je oszacować, to równanie (4.1) należy zastąpić równaniem

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N c_i c_k u(x_i, x_k) \quad (D.3)$$

gdzie  $c_i$  i  $c_k$  są współczynnikami wrażliwości zdefiniowanymi przez równanie (4.3) lub równaniem

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^N u_i(y) u_k(y) r(x_i, x_k) \quad (D.4)$$

gdzie składniki  $u_i(y)$  niepewności standardowej związanej z estymatą wielkości wyjściowej  $y$ , wynikające z niepewności standardowej estymaty wielkości wejściowej  $x_i$  otrzymuje się z równania (4.2). Należy zwrócić uwagę na fakt, że drugie składniki sum w równaniach (D.3) lub (D.4) mogą być wartościami ujemnymi.

- D4** W praktyce wielkości wejściowe są często skorelowane, ponieważ do wyznaczenia ich wartości stosowany jest ten sam fizyczny wzorec odniesienia, przyrząd pomiarowy, dane odniesienia lub nawet metoda pomiarowa charakteryzujące się znaczną niepewnością. Nie ograniczając ogólnego znaczenia przypuśćmy, że dwie wielkości wejściowe  $X_1$  i  $X_2$  o estymatach  $x_1$  i  $x_2$  są zależne od zbioru zmiennych niezależnych  $Q_l$  ( $l=1, 2, \dots, L$ )

$$\begin{aligned} X_1 &= g_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_L) \\ X_2 &= g_2(Q_1, Q_2, \dots, Q_L) \end{aligned} \quad (D.5)$$

choć niekoniecznie wszystkie zmienne  $Q_l$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) muszą występować w obu funkcjach równocześnie. Estymaty  $x_1$  i  $x_2$  wielkości wejściowych będą w pewnym stopniu skorelowane, gdy estymaty  $q_l$  ( $l=1, 2, \dots, L$ ) są nieskorelowane. W tym przypadku, kowariancję  $u(x_1, x_2)$  związaną z estymatami  $x_1$  i  $x_2$  opisuje wyrażenie:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^L c_{1l} c_{2l} u^2(q_l) \quad (D.6)$$

gdzie  $c_{1l}$  i  $c_{2l}$  są współczynnikami wrażliwości wyznaczonymi z funkcji  $g_1$  i  $g_2$  w sposób analogiczny jak w równaniu (4.3). Kowariancja jest równa zeru, jeżeli funkcje  $g_1$  i  $g_2$  nie mają żadnych wspólnych zmiennych, ponieważ tylko składniki, których współczynniki wrażliwości są różne od zera wpływają na sumę w równaniu (D.3). Współczynnik korelacji  $r(x_1, x_2)$  związany z estymatami  $x_1$  i  $x_2$  jest określany za pomocą równań (D.6) i (D.1).

- D5** W poniższym przykładzie przedstawiono korelacje, które mogą występować podczas wzorcowania dwóch wzorców roboczych, wzorcowanych przy użyciu takiego samego wzorca odniesienia.

#### *Problem pomiarowy*

Dwa wzorce wielkości  $X_1$  i  $X_2$  porównywane z wzorcem odniesienia charakteryzującym się wielkością  $Q_s$  za pomocą układu pomiarowego, umożliwiającego określenie różnicy z pomiędzy ich wartościami a związaną niepewnością standardową  $u(z)$ . Wartość  $q_s$  jest znana z niepewnością  $u(q_s)$ .

#### *Model matematyczny*

Estymaty  $x_1$  i  $x_2$  są zależne od wartości  $q_s$  wzorca odniesienia oraz obserwowanych różnic  $z_1$  i  $z_2$  zgodnie z wyrażeniami

$$\begin{aligned} x_1 &= q_s - z_1 \\ x_2 &= q_s - z_2 \end{aligned} \quad (D.7)$$

#### *Niepewności standardowe i kowariancje*

Przypuśćmy, że wielkości  $X_1$ ,  $X_2$  oraz  $Q_s$  są nieskorelowane. Niepewności standardowe obliczono za pomocą równania (4.4) i kowariancję związaną z estymatami  $x_1$  i  $x_2$  obliczono z równania (D.6), przyjmując, że  $u(z_1) = u(z_2) = u(z)$

$$\begin{aligned} u^2(x_1) &= u^2(q_s) + u^2(z) \\ u^2(x_2) &= u^2(q_s) + u^2(z) \\ u(x_1, x_2) &= u^2(q_s) \end{aligned} \quad (D.8)$$

Wyprowadzony z tych wyników współczynnik korelacji wynosi

$$r(x_1, x_2) = \frac{u^2(q_s)}{u^2(q_s) + u^2(z)} \quad (D.9)$$

Wartość tego wyrażenia zawiera się w granicach od 0 do +1, w zależności od stosunku niepewności standardowych  $u(q_s)$  i  $u(z)$ .

- D6** Przypadek opisany równaniem (D.5) jest jednym z przykładów, w którym można nie uwzględniać korelacji przy **ocenie** niepewności standardowej mierzalnego, dokonując starannego wyboru zmiennej w odpowiedniej funkcji pomiaru. Wyprowadzając bezpośrednio niezależne zmienne  $Q_l$ , zastępujące pierwotne zmienne  $X_1$  i  $X_2$  w funkcji pomiaru  $f$ , zgodnie z równaniami (D.5), otrzymuje się nową funkcję pomiaru, która nie będzie zawierała skorelowanych zmiennych  $X_1$  i  $X_2$ .

- D7** Istnieją jednak przypadki, w których korelacja pomiędzy dwoma wielkościami wejściowymi  $X_1$  i  $X_2$  jest nieunikniona, np. używając do wyznaczenia estymat  $x_1$  i  $x_2$  wielkości wejściowych takich samych przyrządów pomiarowych lub takich samych wzorców odniesienia, gdy nie można zastosować równań transformacji nowych zmiennych niezależnych. Jeżeli na dodatek nie jest dokładnie znany stopień korelacji, to może być użyteczna ocena maksymalnego wpływu, jaki ta korelacja może mieć przy górnej granicy estymaty niepewności standardowej mezurandu. Jeżeli nie jest konieczne uwzględnienie również innych korelacji to można użyć wyrażenia

$$u^2(y) \leq (|u_1(y)| + |u_2(y)|)^2 + u_r^2(y) \quad (\text{D.10})$$

gdzie  $u_r(y)$  jest składową niepewności standardowej wszystkich pozostałych wielkości wejściowych, które przyjęto jako wielkości nieskorelowane.

Uwaga: Równanie (D.10) można względnie łatwo stosować również w przypadkach, w których występuje jedna lub kilka grup z dwoma lub kilkoma skorelowanymi wielkościami wejściowymi. W takim przypadku należy, dla każdej grupy skorelowanych wielkości, wprowadzić do równania (D.10) odpowiednią sumę dla najmniej korzystnego przypadku.

**ZAŁĄCZNIK E****Współczynniki rozszerzenia wyznaczone na podstawie wypadkowej liczby stopni swobody**

- E1** Określenie wartości współczynnika rozszerzenia  $k$ , który odpowiada danemu prawdopodobieństwu rozszerzenia, wymaga uwzględnienia wiarygodności niepewności standardowej  $u(y)$  związanej z estymatą  $y$  i wielkości wyjściowej. Oznacza to, że należy ocenić, jak dobrze zostało za pomocą estymaty  $u(y)$  oszacowane odchylenie standardowe związane z wynikiem pomiaru. Dla estymaty odchylenia standardowego rozkładu normalnego, miarą wiarygodności są stopnie swobody tej estymaty, zależne od liczności odpowiedniej próbki losowej. Podobnie wypadkowa liczba stopni swobody  $v_{\text{eff}}$  jest właściwą miarą wiarygodności niepewności standardowej związanej z estymatą wielkości wyjściowej. Z dobrym przybliżeniem jest ona opisana odpowiednią kombinacją wypadkowej liczby stopni swobody różnych składników niepewności  $u_i(y)$ .
- E2** Jeżeli spełnione są warunki centralnego twierdzenia granicznego, to procedura obliczenia odpowiedniego współczynnika rozszerzenia  $k$  składa się z trzech następujących etapów:
- określenie niepewności standardowej związanej z estymatą wielkości wyjściowej zgodnie ze szczegółową procedurą opisaną w punkcie 7,
  - oszacowanie wypadkowej liczby stopni swobody  $v_{\text{eff}}$  niepewności standardowej  $u(y)$ , związanej z estymatą  $y$  i wielkości wyjściowej otrzymaną ze wzoru Welch-Satterthwaite'a

$$v_{\text{eff}} = \frac{u^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}} \quad (\text{E.1})$$

gdzie  $u_i(y)$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) są zdefiniowanymi w równaniu (4.2) składnikami niepewności standardowej związanej z estymatą  $y$  i wielkości wyjściowej. Składniki te wynikają z niepewności standardowej związanej z estymatami  $x_i$  wielkości wejściowych rozpatrywanymi jako wzajemnie statystycznie niezależne;  $v_i$  jest wypadkową liczbą stopni swobody niepewności  $u_i(y)$ .

Dla niepewności standardowej  $u(\bar{q})$  obliczonej metodą oceny typu A, zgodnie z punktem 3.1, liczba stopni swobody wynosi  $v_i = n - 1$ . Ustalenie liczby stopni swobody, odpowiadającej niepewności standardowej  $u(x_i)$  otrzymanej metodą oceny typu B, jest w dużym stopniu problematyczne. Jednakże, w powszechnej praktyce wykonuje się takie **oceny**, aby uniknąć sytuacji niedoszacowania przedziału zmienności. Jeżeli np. określano górne i dolne granice  $a_+$  i  $a_-$ , to są one z reguły dobierane tak, aby prawdopodobieństwo, że dana wielkość znajdzie się poza tymi granicami, było bardzo małe. Przy takim założeniu można przyjąć, że liczba stopni swobody niepewności standardowej  $u(x_i)$  określonej metodą typu B jest nieskończona.

- Określenie współczynnika rozszerzenia  $k$  na podstawie przedstawionej poniżej Tabeli E.1. Tabela ta jest oparta na rozkładzie t-Studenta, określonym dla prawdopodobieństwa rozszerzenia 95,45 %. Jeżeli  $v_{\text{eff}}$  nie jest liczbą całkowitą, co zdarza się najczęściej, należy  $v_{\text{eff}}$  zaokrąglić do najbliższej mniejszej liczby całkowitej.



**Tabela E.1. Współczynniki rozszerzenia  $k$  dla różnych wypadkowych liczb stopni swobody  $\nu_{\text{eff}}$** 

|                    |       |      |      |      |      |      |          |      |      |      |
|--------------------|-------|------|------|------|------|------|----------|------|------|------|
| $\nu_{\text{eff}}$ | 1     | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7        | 8    | 9    | 10   |
| $k$                | 13,97 | 4,53 | 3,31 | 2,87 | 2,65 | 2,52 | 2,43     | 2,37 | 2,32 | 2,28 |
| $\nu_{\text{eff}}$ | 11    | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   | 17       | 18   | 19   | 20   |
| $k$                | 2,25  | 2,23 | 2,21 | 2,20 | 2,18 | 2,17 | 2,16     | 2,15 | 2,14 | 2,13 |
| $\nu_{\text{eff}}$ | 25    | 30   | 35   | 40   | 45   | 50   | $\infty$ |      |      |      |
| $k$                | 2,11  | 2,09 | 2,07 | 2,06 | 2,06 | 2,05 | 2,00     |      |      |      |

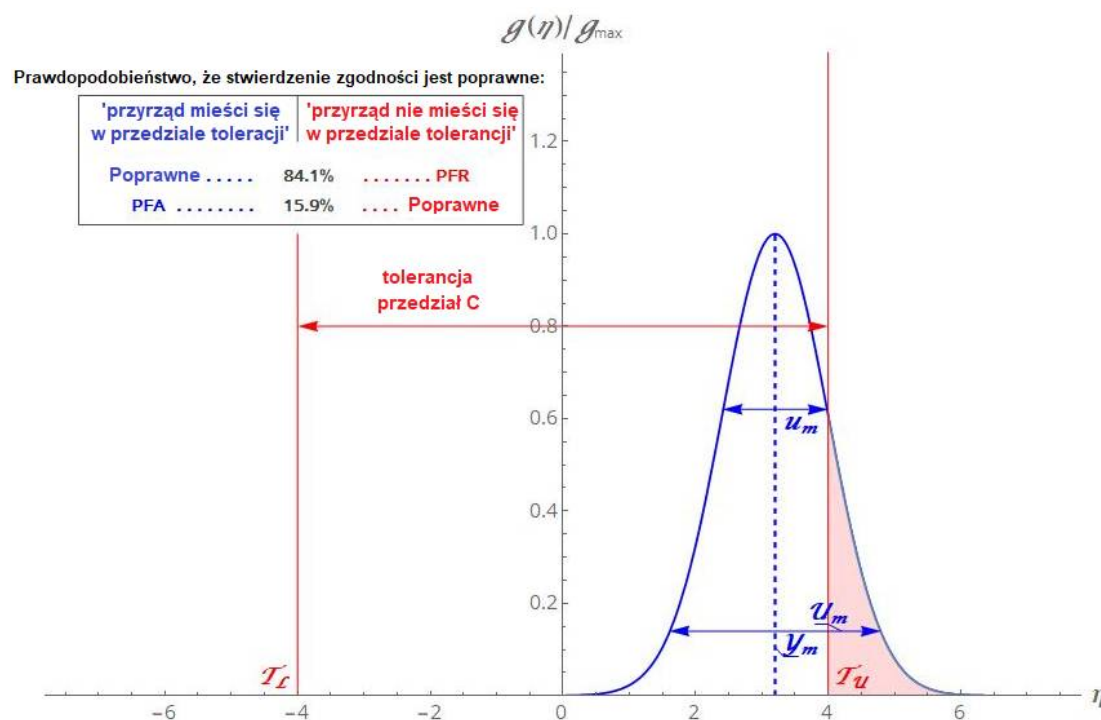
## ZAŁĄCZNIK F

## Zgodność ze specyfikacją

- F1** W pewnych sytuacjach o zgodności wyników wzorcowania decyduje ich porównanie ze specyfikacją, zwykle wyrażoną jako przedział tolerancji lub granice. W takich przypadkach stosuje się zasadę podejmowania decyzji, która określa, w jaki sposób należy uwzględnić niepewność pomiaru przy podejmowaniu decyzji o zgodności [7].
- F2** W przypadku specyfikacji opartych na granicy, obszar funkcji gęstości prawdopodobieństwa (PDF) dla wielkości mierzonej  $Y$  mieszczącej się w przedziale tolerancji  $C$  reprezentuje proporcję zgodnych wartości wielkości mierzonej, które mogą być przyporządkowane zmierzonej wartości  $y_m$ . To jest prawdopodobieństwo zgodności  $p_c$

$$p_c = \int_C g(\eta; y_m, u_m) d\eta$$

- F3** Na przykład, przy założeniu że rozkład jest normalny, na rysunku F1 niezacieniony obszar PDF znajduje się w przedziale tolerancji i reprezentuje zgodne wartości mierzonych, które mogą być przyporządkowane do wyniku pomiaru



Rysunek F1: Wynik pomiaru w przedziale tolerancji określonym przez pojedynczą górną granicę

$T_u$  = górna granica;  $T_L$  = dolna granica;  $u_m$  = niepewność;  $U_m$  = niepewność rozszerzona;  $y_m$  = zmierzona wartość

- F4** Zacieniony obszar na rysunku przedstawia wartości wielkości mierzonej, które nie są zgodne ze specyfikacją i które w podobny sposób można również przyporządkować wynikowi pomiaru. Jeśli na podstawie obserwacji zdecydowano o akceptacji wyniku, i tego, że zmierzona wartość  $y_m$  mieści się w przedziale tolerancji, obszar niezacieniony odpowiada prawdopodobieństwu błędnej akceptacji (PFA). Podobne argumenty są

używane do zdefiniowania prawdopodobieństwa błędnego odrzucenia (PFR), gdy podjęta zostanie decyzja o odrzuceniu wyniku na podstawie obserwacji, że zmierzona wartość  $y_m$  wykracza poza przedział tolerancji.

- F5** Zasady podejmowania decyzji są powszechnie wyrażane jako prawdopodobieństwo zgodności, przy określonym poziomie ryzyka błędnej decyzji (PFA i PFR) lub w innych kategoriach, które wiążą niepewność z wielkością przedziału tolerancji. Mogą być w różny sposób przedstawiane, tak jak {Zgodny, Warunkowo zgodny, Warunkowo niezgodny, Niezgodny} lub {Zgodny, Niepewny, Niezgodny} lub prosty binarny wynik {Zgodny/Niezgodny}, w zależności od tego, w jaki sposób niepewność jest uwzględniana w ramach zasady podejmowania decyzji.
- F6** Przykłady takich zasad i związanych z nimi decyzji o zgodności można znaleźć w dokumentach odniesienia.

## **SUPLEMENT 1**

### **Przykłady**

## S1 WPROWADZENIE

- S1.1** Opisane w niniejszym suplemencie przykłady przedstawiają metody **oceny** niepewności pomiaru. Bardziej typowe i reprezentatywne procedury dla poszczególnych dziedzin pomiarowych powinny być opracowane przez grupy specjalistów zajmujących się tymi dziedzinami. Przedstawione tu przykłady mogą jednak służyć jako ogólne instrukcje dotyczące sposobu oceny niepewności pomiaru.
- S1.2** Przykłady są oparte na projektach przygotowanych przez grupy ekspertów EA. Projekty te uproszczono i ujednolicono tak, aby były zrozumiałe dla pracowników laboratoriów we wszystkich dziedzinach wzorcowania. Autorzy niniejszego opracowania mają nadzieję, że przedstawione przykłady przyczynią się do lepszego zrozumienia szczegółów ustanawiania modelu **oceny** i harmonizacji procesu oceny niepewności pomiaru niezależnie od dziedziny wzorcowania.
- S1.3** Składowe niepewności oraz wartości przedstawiane w przytoczonych przykładach nie powinny być uznawane jako wartości zalecane lub preferowane. Laboratoria powinny określić składowe niepewności na podstawie funkcji pomiaru, którą stosują w ocenie określonego wzorcowania, które wykonują, oraz raportowaniu wyznaczonej niepewności pomiaru w wydawanym świadectwie wzorcowania. We wszystkich przedstawionych przykładach spełnione są warunki, określone w punkcie 5 podstawowej części niniejszego Przewodnika, uzasadniające stosowanie standardowego współczynnika rozszerzenia  $k = 2$ .
- S1.4** Poszczególne przykłady zostały opracowane według ogólnego schematu, zgodnie ze szczegółową procedurą przedstawioną w punkcie 6 podstawowej części niniejszego Przewodnika dotyczącym szczegółowej procedury obliczania niepewności pomiaru, oraz zawierają:
- krótki opisowy tytuł procedury,
  - ogólny opis procesu pomiarowego,
  - model matematyczny pomiaru wraz z wykazem użytych symboli wielkości,
  - szczegółową listę danych wejściowych wraz z krótkim opisem sposobu ich uzyskania,
  - wykaz obserwacji wraz z oceną ich parametrów statystycznych,
  - budżet niepewności w formie tabeli,
  - niepewność pomiaru rozszerzoną,
  - zapis pełnego wyniku pomiaru.
- S1.5** Zakłada się, że zostaną wydane następne suplementy, które zawierać będą dalsze przykłady **oceny** niepewności pomiaru związanej z wzorcowaniem przyrządów. Przykłady takie można również znaleźć w **przewodnikach wzorcowania EURAMET** zawierających wytyczne dotyczące wzorcowania szczególnych typów przyrządów pomiarowych.

**S2 WZORCOWANIE WZORCA MASY O WARTOŚCI NOMINALNEJ 10 kg**

**S2.1** Wzorcowania wzorca masy o wartości nominalnej 10 kg, klasy M1 (wg OIML) dokonuje się poprzez porównanie z wzorcem odniesienia klasy F2 (wg OIML) o tej samej wartości nominalnej, stosując komparator masy, którego charakterystykę metrologiczną określono wcześniej.

**S2.2** Nieznaną masę umowną  $m_x$  można określić z równania:

$$m_x = m_s + \delta m_D + \delta m + \delta m_C + \delta B \quad (\text{S2.1})$$

gdzie:

- $m_s$  - masa umowna wzorca odniesienia,
- $\delta m_D$  - dryf wartości masy wzorca odniesienia od jego ostatniego wzorcowania,
- $\delta m$  - zaobserwowana różnica pomiędzy masą wzorca badanego a masą wzorca odniesienia,
- $\delta m_C$  - poprawka na niecentryczność i wpływy magnetyczne,
- $\delta B$  - poprawka na wypór powietrza.

**S2.3 Wzorzec odniesienia ( $m_s$ ):** W świadectwie wzorcowania wzorca kontrolnego podano wartość masy 10 000,005 g z niepewnością rozszerzoną wynoszącą 45 mg ( $k = 2$ ).

**S2.4 Dryf wartości masy wzorca ( $\delta m_D$ ):** Dryf masy umownej wzorca odniesienia został oszacowany na podstawie poprzednich wzorcowań i wynosi  $(0 \pm 15)$  mg.

**S2.5 Komparator masy ( $\delta m, \delta m_C$ ):** Wcześniejsza ocena powtarzalności wyznaczania różnicy mas dwóch wzorców masy o tej samej nominalnej wartości daje w wyniku estymatę połączoną odchylenia standardowego wynoszącą 25 mg. Dla komparatora nie zastosowano żadnej poprawki, natomiast zmiany spowodowane niecentrycznością oraz wpływem magnetyzmu oszacowano na  $\pm 10$  mg przyjmując rozkład prostokątny prawdopodobieństwa.

**S2.6 Wypór powietrza ( $\delta B$ ):** Nie określono poprawki na wypór powietrza, oszacowano, że wartości graniczne odchylenia, spowodowanych tym zjawiskiem, wynoszą  $\pm 1 \cdot 10^{-6}$  wartości nominalnej.

**S2.7 Korelacja:** Żadna z rozpatrywanych wielkości wejściowych nie jest w istotnym stopniu ze sobą skorelowana.

**S2.8 Pomiary:** wykonano trzy obserwacje różnicy masy pomiędzy wzorcem masy badanym a wzorcem odniesienia, stosując metodę podstawiania według następującego schematu ABBA ABBA ABBA:.

**Uwaga:** Schemat podstawienia ABBA oznacza, że dla każdego zestawu obserwacji najpierw mierzona jest masa wzorca, następnie dwukrotnie mierzona jest masa nieznaną, i na końcu ponownie mierzona jest masa wzorca.

| nr pomiaru | wzorzec masy | Wskaźnik<br>(g) | Różnica<br>(g) |
|------------|--------------|-----------------|----------------|
| 1          | odniesienia  | + 0,010         |                |
|            | badany       | + 0,020         |                |
|            | badany       | + 0,025         |                |
| 2          | odniesienia  | + 0,015         | + 0,010        |
|            | odniesienia  | + 0,025         |                |
|            | badany       | + 0,050         |                |
|            | badany       | + 0,055         |                |
| 3          | odniesienia  | + 0,020         | + 0,030        |
|            | odniesienia  | + 0,025         |                |
|            | badany       | + 0,045         |                |
|            | badany       | + 0,040         |                |
|            | odniesienia  | + 0,020         | + 0,020        |

średnia arytmetyczna:

$$\delta\bar{m} = 0,020 \text{ g}$$

estymata połączona odchylenia standardowego  
(uzyskana na podstawie wcześniejszych pomiarów):

$$s_p(\delta m) = 25 \text{ mg}$$

niepewność standardowa:

$$u(\delta\bar{m}) = s(\delta m) = \frac{25 \text{ mg}}{\sqrt{3}} = 14,4 \text{ mg}$$

### S2.9 Budżet niepewności ( $m_X$ ):

| symbol wielkości<br>$X_i$ | estymata wielkości<br>$x_i$ | niepewność standardowa<br>$u(x_i)$ | rozkład prawdo –<br>podobieństwa | współczynnik<br>wrażliwości<br>$c_i$ | udział<br>niepewności<br>$u_i(y)$ |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------|
| $m_S$                     | 10 000,005 g                | 22,5 mg                            | normalny                         | 1,0                                  | 22,5 mg                           |
| $\delta m_D$              | 0,000 g                     | 8,66 mg                            | prostokątny                      | 1,0                                  | 8,95 mg                           |
| $\delta m$                | 0,020 g                     | 14,4 mg                            | normalny                         | 1,0                                  | 14,4 mg                           |
| $\delta m_C$              | 0,000 g                     | 5,77 mg                            | prostokątny                      | 1,0                                  | 5,77 mg                           |
| $\delta B$                | 0,000 g                     | 5,77 mg                            | prostokątny                      | 1,0                                  | 5,77 mg                           |
| $m_X$                     | 10 000,025 g                |                                    |                                  |                                      | 29,2 mg                           |



## S2.10 Niepewność rozszerzona

$$U = k \cdot u(m_x) = 2 \cdot 29,2 \text{ mg} \cong 58 \text{ mg}$$

Chociaż wyznaczenie  $\delta m$  bazuje tylko na trzech powtarzanych odczytach, oceniona niepewność opiera się na wcześniej określonej zbiorczej estymacie odchylenia standardowego. Zatem efektywne stopnie swobody są duże i biorąc pod uwagę fakt, że dominujący czynnik niepewności ma rozkład normalny, można zastosować standardowy współczynnik rozszerzenia  $k=2$ .

## S2.11 Zapis wyniku pomiaru

Wyznaczona masa wzorca masy o wartości nominalnej 10 kg wynosi 10,000 025 kg  $\pm$  58 mg.

Podana niepewność pomiaru rozszerzona została określona jako niepewność standardowa pomiaru pomnożona przez współczynnik rozszerzenia  $k = 2$ , co dla rozkładu normalnego jest równoznaczne z prawdopodobieństwem rozszerzenia wynoszącym w przybliżeniu 95 %.

### S3 WZORCOWANIE REZYSTORA WZORCOWEGO O REZYSTANCJI NOMINALNEJ 10 kΩ

**S3.1** Rezystancję czterozaciskowego rezystora wzorcowego określano metodą bezpośredniego podstawiania, stosując multimetr cyfrowy o szerokim zakresie wskazań (7 i ½ cyfry) oraz wywzorcowany czterozaciskowy rezystor, o wartości nominalnej identycznej z wartością nominalną rezystora badanego, jako wzorzec odniesienia. Rezystory zanurzone do jednorodnej kąpeli olejowej o temperaturze 23°C, sprawdzanej za pomocą centralnie umieszczonego szklanego termometru rtęciowego. Przed pomiarem rezystory zostały odpowiednio wystabilizowane. Zaciski każdego rezystora po kolei podłączano do zacisków multimetru cyfrowego. Prąd pomiarowy o natężeniu 100 μA, dla zakresu pomiarowego multimetru cyfrowego 10 kΩ, jest wystarczająco mały, aby nie powodować zauważalnego samonagrzewania się rezystorów. Stosowana procedura pomiarowa gwarantuje również, że wpływ rezystancji połączeń rezystorów na wynik pomiaru można uważać za nieistotny.

**S3.2** Rezystancję  $R_X$  rezystora badanego opisuje równanie:

$$R_X = (R_S + \delta R_D + \delta R_{TS}) r_C r - \delta R_{TX} \quad (\text{S3.1})$$

gdzie:

- $R_S$  - rezystancja wzorca odniesienia,
- $\delta R_D$  - dryf rezystancji wzorca odniesienia od ostatniego wzorcowania,
- $\delta R_{TS}$  - zmiana rezystancji wzorca odniesienia spowodowana zmianą temperatury,
- $r = R_{iX} / R_{iS}$  - iloraz wskazań rezystancji rezystora badanego do rezystancji wzorca odniesienia (indeks i – symbolizuje wskazanie)
- $r_C$  - współczynnik poprawkowy na napięcia pasożytnicze i rozdzielczość przyrządu
- $\delta R_{TX}$  - zmiana rezystancji rezystora badanego spowodowana zmianą temperatury

**S3.3 Wzorzec odniesienia ( $R_S$ ):** w świadectwie wzorcowania wzorca odniesienia podano wartość rezystancji 10 000,053 Ω ± 5 mΩ ( $k = 2$ ) w temperaturze odniesienia 23°C.

**S3.4 Dryf wartości wzorca ( $\delta R_D$ ):** dryf rezystancji wzorca odniesienia w okresie od ostatniego wzorcowania oszacowany na podstawie danych z wcześniejszych wzorcowań wynosi +20 mΩ z odchyleniem w granicach ±10 mΩ.

**S3.5 Poprawki na temperaturę ( $\delta R_{TS}$ ,  $\delta R_{TX}$ ):** temperatura kąpeli olejowej, wynosząca 23,00°C, mierzona jest za pomocą wywzorcowanego termometru. Na podstawie charakterystyki metrologicznej termometru oraz gradientu temperatury w kąpeli olejowej oszacowano, że temperatura rezystorów nie różni się od temperatury wskazanej o więcej niż ± 0,055 K. Na podstawie znanej wartości temperaturowego współczynnika rezystancji rezystora odniesienia, wynoszącej  $5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , oszacowano, że odchylenia od rezystancji podanej w świadectwie wzorcowania dla tego rezystora mogą zmieniać się w granicach ±2,75 mΩ. Na podstawie danych producenta oszacowano, że współczynnik temperaturowy rezystancji badanego rezystora nie przekracza  $1,0 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , a zatem zmiany rezystancji tego rezystora spowodowane zmianami temperatury mieszczą się w granicach ±5,5 mΩ.

**S3.6 Pomiary rezystancji ( $r_C$ ):** Ponieważ do pomiaru obu rezystancji  $R_{IX}$  i  $R_{IS}$  użyto tego samego multimetru cyfrowego, to składowe ich niepewności są skorelowane. Korelacja w tym przypadku powoduje zmniejszenie niepewności, w związku z tym należy jedynie uwzględnić względną różnicę wskazań rezystancji spowodowaną oddziaływaniami systematycznymi, takimi jak napięcie pasożytnicze i rozdzielczość przyrządu (patrz punkt S3.12). Wartości graniczne tych oddziaływań oszacowano na poziomie  $\pm 0,5 \cdot 10^{-6}$  dla każdego wskazania. Przyjęto trójkątny rozkład prawdopodobieństwa z wartością oczekiwaną 1,000 000 0 oraz granicami zmienności  $\pm 1,0 \cdot 10^{-6}$ .

**S3.7 Korelacja:** Żadnej z wielkości wejściowych nie rozpatrywano jako wielkości w istotnym stopniu skorelowanej.

**S3.8 Pomiary:** Przeprowadzono pięć pomiarów w celu określenia ilorazu  $r$ :

| Nr pomiaru | iloraz $r$  |
|------------|-------------|
| 1          | 1,000 010 4 |
| 2          | 1,000 010 7 |
| 3          | 1,000 010 6 |
| 4          | 1,000 010 3 |
| 5          | 1,000 010 5 |

średnia arytmetyczna:

$$\bar{r} = 1,000\ 010\ 5$$

odchylenie standardowe eksperymentalne:

$$s(r) = 0,158 \cdot 10^{-6}$$

niepewność standardowa:

$$u(r) = s(\bar{r}) = \frac{0,158 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5}} = 0,0707 \cdot 10^{-6}$$

**S3.9 Budżet niepewności ( $R_X$ ):**

| symbol wielkości | estymata wielkości  | niepewność standardowa | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności |
|------------------|---------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|--------------------|
| $X_i$            | $x_i$               | $u(x_i)$               |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$           |
| $R_S$            | 10 000,053 $\Omega$ | 2,5 m $\Omega$         | normalny                   | 1,0                      | 2,5 m $\Omega$     |
| $\delta R_D$     | 0,020 $\Omega$      | 5,8 m $\Omega$         | prostokątny                | 1,0                      | 5,8 m $\Omega$     |
| $\delta R_{TS}$  | 0,000 $\Omega$      | 1,6 m $\Omega$         | prostokątny                | 1,0                      | 1,6 m $\Omega$     |
| $\delta R_{TX}$  | 0,000 $\Omega$      | 3,2 m $\Omega$         | prostokątny                | 1,0                      | 3,2 m $\Omega$     |
| $r_C$            | 1,000 000 0         | $0,41 \cdot 10^{-6}$   | trójkątny                  | 10 000 $\Omega$          | 4,1 m $\Omega$     |
| $r$              | 1,000 010 5         | $0,07 \cdot 10^{-6}$   | normalny                   | 10 000 $\Omega$          | 0,7 m $\Omega$     |
| $R_X$            | 10 000,178 $\Omega$ |                        |                            |                          | 8,33 m $\Omega$    |

**S3.10 Niepewność rozszerzona**

$$U = k \cdot u(R_X) = 2 \cdot 8,33 \text{ m}\Omega \cong 17 \text{ m}\Omega$$

### S3.11 Zapis wyniku pomiaru

Zmierzona wartość rezystancji rezystora o nominalnej wartości 10 kΩ w temperaturze pomiaru 23,00°C i dla prądu pomiarowego 100 μA wynosi (10 000,178 ± 0,017) Ω.

Podana rozszerzona niepewność pomiaru została określona, jako standardowa niepewność pomiaru pomnożona przez współczynnik rozszerzenia  $k = 2$ , co dla rozkładu normalnego jest równoznaczne z prawdopodobieństwem rozszerzenia wynoszącym w przybliżeniu 95 %.

**S3.12 Uwaga matematyczna dotycząca wyznaczenia standardowej niepewności pomiaru ilorazu  $r_c$ :** rezystor badany i rezystor odniesienia mają prawie identyczną rezystancję. Stosując typową aproksymację liniową w odniesieniu do odchyłeń, wartości powodujące wskazania  $R_{iX}$  i  $R_{iS}$  na multimetrze cyfrowym są następujące

$$\begin{aligned} R'_X &= R_{iX} \left( 1 + \frac{\delta R'_X}{R} \right) \\ R'_S &= R_{iS} \left( 1 + \frac{\delta R'_S}{R} \right) \end{aligned} \quad (\text{S3.2})$$

gdzie  $R$  jest wartością nominalną rezystorów, a  $\delta R'_X$  i  $\delta R'_S$  nieznanymi odchyleniami. Stosunek rezystancji tych dwóch rezystorów wynosi

$$\frac{R'_X}{R'_S} = r r_c \quad (\text{S3.3})$$

gdzie  $r$  jest stosunkiem wskazań rezystancji nieznanego rezystora do rezystancji rezystora odniesienia

$$r = \frac{R_{iX}}{R_{iS}} \quad (\text{S3.4})$$

oraz  $r_c$  jest współczynnikiem poprawkowym (aproksymacja liniowa odchyłeń)

$$r_c = 1 + \frac{\delta R'_X - \delta R'_S}{R} \quad (\text{S3.5})$$

Biorąc pod uwagę fakt, że do wzoru (S3.5) wchodzi różnica odchyłeń, na wynik pomiaru nie wpływają skorelowane składowe oddziaływań systematycznych wynikających z wybranego zakresu multimetru cyfrowego. Niepewność standardowa współczynnika poprawkowego jest określona tylko odchyleniami nieskorelowanymi, będącymi wynikiem oddziaływań pasożytniczych i rozdzielczości multimetru cyfrowego. Zakładając, że  $u(\delta R'_X) = u(\delta R'_S) = u(\delta R')$  to

$$u^2(r_c) = 2 \frac{u^2(\delta R')}{R^2} \quad (\text{S3.6})$$

**S4 WZORCOWANIE PŁYTKI WZORCOWEJ O DŁUGOŚCI NOMINALNEJ 50 mm**

**S4.1** Wzorcowanie płytki wzorcowej klasy 0 (ISO 3650) o długości nominalnej 50 mm przeprowadza się za pomocą komparatora poprzez porównanie z wyzorcowaną wzorcową płytką odniesienia o tej samej długości nominalnej i wykonaną z tego samego materiału. Różnica długości środkowej jest określana w położeniu pionowym obu płytek za pomocą dwóch czujników stykających się z górną i dolną powierzchnią pomiarową. Rzeczywistą długość wzorcowanej płytki wzorcowej  $l'_x$  porównywanej z rzeczywistą długością wzorcowej płytki odniesienia  $l'_s$  można wyrazić równaniem:

$$l'_x = l'_s + \delta l \quad (\text{S4.1})$$

gdzie  $\delta l$  jest mierzoną różnicą długości, a  $l'_x$  i  $l'_s$  są długościami płytek wzorcowych w warunkach pomiaru tj. przy temperaturze, która ze względu na niepewność pomiaru temperatury w laboratorium, może nie być identyczna z temperaturą odniesienia dla pomiarów długości.

**S4.2** Długość  $l_x$  płytki wzorcowanej w temperaturze odniesienia otrzymuje się z wyrażenia:

$$l_x = l_s + \delta l_D + \delta l + \delta l_C - L(\bar{\alpha} \times \delta t + \delta \alpha \times \Delta \bar{t}) - \delta l_V \quad (\text{S4.2})$$

gdzie:

|  |   |  |
|--|---|--|
| $l_s$  | - | długość płytki odniesienia w temperaturze odniesienia $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , podana w świadectwie wzorcowania, |
| $\delta l_D$                                   | - | zmiana długości płytki odniesienia od ostatniego wzorcowania spowodowana dryfem,                                   |
| $\delta l$                                     | - | zmierzona różnica długości obu płytek,   |
| $\delta l_C$                                   | - | poprawka na nieliniowość i niedokładności ustawienia komparatora,  |
| $L$  | - | nominalna długość płytki wzorcowej,  |
| $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_x + \alpha_s}{2}$ | - | wartość średnia współczynników rozszerzalności cieplnej obu płytek wzorcowych,                                     |
| $\delta t = t_x - t_s$                         | - | różnica temperatur płytek wzorcowych,  |
| $\delta \alpha = \alpha_x - \alpha_s$          | - | różnica współczynników rozszerzalności cieplnej płytki wzorcowanej i płytki odniesienia,                           |
| $\Delta \bar{t} = \frac{t_x - t_s}{2} - t_0$   | - | odchylenie średniej temperatury płytki wzorcowanej i płytki odniesienia od temperatury odniesienia ( $t_0$ )       |
| $\delta l_V$                                   | - | poprawka na niecentryczność styku z powierzchniami pomiarowymi płytki wzorcowanej.                                 |

**S4.3 Wzorzec odniesienia ( $l_s$ ):** Długość płytki odniesienia wraz z niepewnością rozszerzoną podana jest w świadectwie wzorcowania kompletu płytek wzorcowych i wynosi  $50,000\ 02\ \text{mm} \pm 30\ \text{nm}$  ( $k = 2$ ).

**S4.4 Dryf wzorca ( $\delta l_D$ ):** Czasowy dryf długości płytki odniesienia oszacowano na podstawie poprzednich wzorcowań i stwierdzono, że wynosi  $0 \pm 30\ \text{nm}$ . Ogólne doświadczenia z tego typu płytkami wzorcowymi pozwalają stwierdzić, że najbardziej prawdopodobna

jest zerowa wartość dryfu i można przyjąć dla niej trójkątny rozkład prawdopodobieństwa.

- S4.5 Komparator ( $\delta l_c$ ):** Sprawdzano, że komparator spełnia wymagania określone w **EURAMET cg-2 Version 2.0 (03/2011)**. W oparciu o ten fakt można stwierdzić, że dla różnic długości  $D$  wynoszących do  $\pm 10 \mu\text{m}$ , poprawki dla stwierdzonych różnic długości wynoszą  $\pm(30 \text{ nm} + 0,02 \times |D|)$ , gdzie  $D$  wyrażona jest w  $\mu\text{m}$ . Uwzględniając tolerancje płytki wzorcowej klasy 0 oraz płytki odniesienia klasy K, największa różnica ich długości będzie wynosić  $\pm 1 \mu\text{m}$ , a poprawka na nieliniowość i niedokładność ustawienia komparatora będzie zawierać się w granicach  $\pm 32 \text{ nm}$ .
- S4.6 Poprawki ze względu na temperaturę ( $\bar{\alpha}, \delta t, \delta \alpha, \Delta \bar{t}$ ):** Przed wzorcowaniem należy zapewnić takie warunki, aby temperatura płytek wzorcowych była zgodna z temperaturą w pomieszczeniu pomiarowym. Szczątkowe różnice pomiędzy temperaturą płytki wzorcowanej a temperaturą płytki odniesienia oszacowano na  $\pm 0,05 \text{ K}$ . Na podstawie danych zawartych w świadectwie wzorcowania płytki odniesienia oraz danych producenta płytki wzorcowanej założono, że liniowe współczynniki rozszerzalności cieplnej płytek wzorcowych stalowych mieszczą się w granicach  $(11,5 \pm 1,0) \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Łącząc dwa rozkłady prostokątne różnica liniowych współczynników rozszerzalności cieplnej przyjmuje kształt rozkładu trójkątnego o granicach  $\pm 2 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Odchylenie średniej temperatury pomiaru od temperatury odniesienia  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  oszacowano jako wartość mieszczącą się w przedziale  $\pm 0,5^\circ\text{C}$ . Najlepszą wartością oszacowaną dla różnicy liniowych współczynników rozszerzalności cieplnej i odchylenia średniej temperatury pomiaru od temperatury odniesienia jest zero. Dlatego przy szacowaniu składników niepewności należy brać pod uwagę wyrazy drugiego rzędu, co zmusza do uwzględnienia iloczynu niepewności standardowych związanych z czynnikami członu  $\delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}$  w równaniu (S4.2) (patrz punkt S4.13, równanie (S4.5)). Końcowa niepewność standardowa wynosi  $u(\delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}) = 0,236 \cdot 10^{-6}$ .
- S4.7 Odchylenie długości płytki ( $\delta l_V$ ):** Dla płytek wzorcowych klasy 0 odchylenie długości płytki, określane na podstawie pomiarów wykonanych w środku i w czterech rogach płytki, powinno znajdować się w przedziale  $\pm 0,10 \mu\text{m}$  (ISO 3650:1998). Zakładając, że odchylenie to będzie występować na powierzchniach pomiarowych wzdłuż krótszej krawędzi o długości  $9 \text{ mm}$  i że długość środkową mierzono wewnątrz okręgu o promieniu  $0,5 \text{ mm}$ , to poprawkę na nieosiowość punktów styku oszacowano jako znajdującą się w przedziale  $\pm 6,7 \text{ nm}$ .
- S4.8 Korelacja:** Żadnej z wielkości wejściowych nie rozpatrywano jako wielkości w istotnym stopniu skorelowanej.
- S4.9 Pomiary ( $\delta l$ ):** Przeprowadzono następujące pomiary różnic pomiędzy długością płytki wzorcowanej i płytki odniesienia. Przed każdym odczytem komparator zerowano na wzorcu odniesienia.

| Numer pomiaru | Wartość zmierzona |
|---------------|-------------------|
| 1             | -100 nm           |
| 2             | -95 nm            |
| 3             | -80 nm            |
| 4             | -95 nm            |
| 5             | -100 nm           |

średnia arytmetyczna:  $\delta \bar{l} = -94 \text{ nm}$

połączona estymata odchylenia standardowego  
(uzyskana z wcześniejszych pomiarów)  $s_p(\delta l) = 12 \text{ nm}$

niepewność standardowa  $u(\delta l) = s(\delta \bar{l}) = \frac{12 \cdot \text{nm}}{\sqrt{5}} = 5,37 \text{ nm}$

Połączoną estymatę odchylenia standardowego przyjęto na podstawie badań przeprowadzonych w celu potwierdzenia zgodności komparatora z wymaganiami **EURAMET cg-2 Version 2.0 (03/2011) (wcześniej EAL-G21:1996)**.

#### S4.10 Budżet niepewności ( $\delta x$ ):

| symbol wielkości                     | estymata wielkości | niepewność standardowa   | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności |
|--------------------------------------|--------------------|--------------------------|----------------------------|--------------------------|--------------------|
| $X_i$                                | $x_i$              | $u(x_i)$                 |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$           |
| $l_s$                                | 50,000 020 mm      | 15 nm                    | normalny                   | 1,0                      | 15,0 nm            |
| $\delta l_D$                         | 0 mm               | 12,2 nm                  | trójkątny                  | 1,0                      | 12,2 nm            |
| $\delta l$                           | -0,000 094 mm      | 5,37 nm                  | normalny                   | 1,0                      | 5,37 nm            |
| $\delta l_C$                         | 0 mm               | 18,5 nm                  | prostokątny                | 1,0                      | 18,5 nm            |
| $\delta t$                           | 0°C                | 0,0289°C                 | prostokątny                | -575 nm°C <sup>-1</sup>  | -16,6 nm           |
| $\delta \alpha \cdot \Delta \bar{t}$ | 0                  | 0,236 · 10 <sup>-6</sup> | -                          | -50 mm                   | -11,8 nm           |
| $\delta l_V$                         | 0 mm               | 3,87 nm                  | prostokątny                | -1,0                     | -3,87 nm           |
| $l_x$                                | 49,999 926 mm      |                          |                            |                          | 34,4 nm            |

#### S4.11 Niepewność rozszerzona

$$U = k \cdot u(l_x) = 2 \cdot 34,3 \text{ nm} \cong 69 \text{ nm}$$

#### S4.12 Zapis wyniku pomiaru

Zmierzona wartość płytki wzorcowej o długości nominalnej 50 mm wynosi 49,999 926 mm ± 69 nm.

Podana niepewność pomiaru rozszerzona została określona jako standardowa niepewność pomiaru pomnożona przez współczynnik rozszerzenia  $k = 2$ , który dla rozkładu normalnego odpowiada prawdopodobieństwu rozszerzenia ok. 95 %.

#### S4.13 Uwaga matematyczna dotycząca niepewności standardowej pomiaru iloczynu dwóch wielkości o wartości oczekiwanej równej zero:

Jeżeli rozpatrywano iloczyn dwóch wielkości, to w przypadku, gdy jedna lub obie wartości oczekiwane mnożników tego iloczynu są równe zero, konieczne jest zmodyfikowanie stosowanej zwykle metody **oceny** składników niepewności polegającej na linearyzacji funkcji pomiaru. Jeżeli mnożniki iloczynu są statystycznie niezależne i ich wartości oczekiwane są różne od zera, to kwadrat względnej niepewności standardowej pomiaru (wariancja względna) związany z iloczynem można wyrazić bez linearyzacji za

pomocą kwadratów względnych niepewności standardowych związanych z wartościami oczekiwanymi mnożników:

$$w^2(x_1 \times x_2) = w^2(x_1) + w^2(x_2) + w^2(x_1) \times w^2(x_2) \quad (\text{S4.2})$$

Stosując definicję względnej niepewności standardowej pomiaru, równanie to można łatwo przekształcić do postaci:

$$u^2(x_1 \times x_2) = x_2^2 u^2(x_1) + x_1^2 u^2(x_2) + u^2(x_1) \times u^2(x_2) \quad (\text{S4.3})$$

Jeżeli niepewności standardowe  $u(x_1)$  i  $u(x_2)$  związane z wartościami oczekiwanymi  $x_1$  i  $x_2$  są znacznie mniejsze niż odpowiednie moduły wartości oczekiwanych, to trzeci człon prawej strony równania (S4.3) można pominąć. Równanie wynikowe przedstawia wówczas zwykły przypadek oparty na linearyzacji funkcji pomiaru.

Jeżeli jednak jeden z modułów wartości oczekiwanych, np.  $|x_2|$  jest znacznie mniejszy niż niepewność standardowa  $u(x_2)$  związana z wartością oczekiwaną lub równy zero, to iloczyn będący pierwszym członem równania (S4.3) można pominąć. Równanie końcowe wówczas przyjmie postać:

$$u^2(x_1 \times x_2) \cong x_1^2 u^2(x_2) + u^2(x_1) \times u^2(x_2) \quad (\text{S4.4})$$

Jeżeli oba moduły wartości oczekiwanych są znacznie mniejsze od związanych z nimi niepewności standardowych lub równe zero, jedynie trzeci człon równania (S4.4) ma istotny udział w niepewności:

$$u^2(x_1 \times x_2) \cong u^2(x_1) \times u^2(x_2) \quad (\text{S4.5})$$

Innym przykładem składowej, która nie zawsze może podlegać rozsądnej linearyzacji, jest  $Y = X^2$ . Jeśli  $X$  ma rozkład normalny ze średnią  $m$  i wariancją  $s^2$ , wtedy wartość oczekiwana  $Y$  wynosi  $m^2 + s^2$ , a niepewność standardowa wynosi  $\sqrt{2(2m^2s^2 + s^4)}$ . Na przykład, jeśli  $X$  ma średnią  $m=0$ ,  $Y=X^2$  należy przypisać wartość  $y = s^2$  z  $u(y) = \sqrt{2} s$ .



**S5 WZORCOWANIE TERMOELEMENTU TYPU N W TEMPERATURZE 1000°C**

**S5.1** Wzorcowanie termoelementu typu N wykonuje się przez porównanie z dwoma termoelementami odniesienia typu R w poziomym piecu, w temperaturze 1000°C. Powstającą w obwodach termoelementów siłę termoelektryczną mierzono woltmierzem cyfrowym poprzez rewersyjny przełącznik wielopozycyjny. Spiny odniesienia wszystkich termoelementów umieszczono w temperaturze 0°C. Termoelement wzorcowany jest połączony z punktami odniesienia poprzez przewody kompensacyjne. Wartości temperatury odnoszą się do Międzynarodowej Skali Temperatury z 1990 r. (ang. ITS-90).

**S5.2** Temperatura  $t_x$  spiny pomiarowej wzorcowanego termoelementu dana jest wyrażeniem:

$$t_x = t_s \left( V_{is} + \delta V_{is1} + \delta V_{is2} + \delta V_R - \frac{\delta t_{0s}}{C_{s0}} \right) + \delta t_D + \delta t_F$$

$$\cong t_s (V_{is}) + C_s \times \delta V_{is1} + C_s \times \delta V_{is2} + C_s \times \delta V_R - \frac{C_s}{C_{s0}} \delta t_{0s} + \delta t_D + \delta t_F \quad (S5.1)$$

**S5.3** Napięcie  $V_x$  powstające w obwodzie termoelementu podczas wzorcowania, gdy temperatura spiny odniesienia wynosi 0°C, dane jest wyrażeniem:

$$V_x(t) \cong V_x(t_x) + \frac{\Delta t}{C_x} - \frac{\delta t_{0x}}{C_{x0}} = V_{ix} + \delta V_{ix1} + \delta V_{ix2} + \delta V_R + \delta V_{LX} + \frac{\Delta t}{C_x} - \frac{\delta t_{0x}}{C_{x0}} \quad (S5.2)$$

gdzie:

- $t_s(V)$  - temperatura termoelementu odniesienia wyrażona jako napięcie, przy temperaturze spiny odniesienia 0°C. Zależność funkcyjną podano w świadectwie wzorcowania;
- $V_{is}, V_{ix}$  - wskazania woltmierza;
- $\delta V_{is1}, \delta V_{ix1}$  - poprawki wskazania woltmierza ustalone podczas jego wzorcowania;
- $\delta V_{is2}, \delta V_{ix2}$  - poprawki napięć spowodowane ograniczoną rozdzielczością woltmierza;
- $\delta V_R$  - poprawka spowodowana zmianami napięcia powstającymi na zaciskach przełącznika wielopozycyjnego;
- $\delta t_{0s}, \delta t_{0x}$  - poprawki spowodowane odchyleniem temperatury odniesienia od temperatury 0°C;
- $C_s, C_x$  - napięciowe czułości termoelementów w mierzonej temperaturze równej 1000°C;
- $C_{s0}, C_{x0}$  - napięciowe czułości termoelementów w temperaturze odniesienia równej 0°C;
- $\delta t_D$  - zmiana wskazań termometrów odniesienia od ich ostatniego wzorcowania, spowodowana dryfem,
- $\delta t_F$  - poprawka temperatury uwzględniająca niejednorodność temperatury w piecu grzejnym;
- $t$  - temperatura, w której wzorcowany jest termoelement (punkt wzorcowania);
- $\Delta t = t - t_x$  - odchylenie temperatury punktu wzorcowania od temperatury rzeczywistej w piecu;

- $\delta V_{LX}$  - poprawka napięcia spowodowana oddziaływaniami przewodów kompensacyjnych.
- S5.4** Podawanym wynikiem jest siła termoelektryczna powstająca w obwodzie termoelementu, zależna od temperatury jego spoiny pomiarowej. Ponieważ proces pomiarowy składa się z dwóch etapów – określania temperatury rzeczywistej w piecu oraz określania siły termoelektrycznej wzorcowanego termoelementu – ocena niepewności jest również podzielona na dwie części.
- S5.5 Wzorce odniesienia ( $t_S(V)$ ):** Termoelementy odniesienia posiadają świadectwa wzorcowania zawierające zależność temperatury ich spoin pomiarowych (przy temperaturze spoiny odniesienia równej  $0^\circ\text{C}$ ) od napięć powstających w obwodach termoelementów. Niepewność rozszerzona w temperaturze pomiaru  $1000^\circ\text{C}$  wynosi  $U = 0,3^\circ\text{C}$  ( $k = 2$ ).
- S5.6 Wzorcowanie woltomierza ( $\delta V_{IS1}, \delta V_{IX1}$ ):** Przeprowadzono wzorcowanie woltomierza. Wszystkie wyniki pomiarów napięcia są odpowiednio korygowane. Świadectwo wzorcowania podaje dla napięć niższych niż  $50\text{ mV}$  stałą niepewność rozszerzoną  $U = 2,0\ \mu\text{V}$  ( $k = 2$ ).
- S5.7 Rozdzielczość woltomierza ( $\delta V_{IS2}, \delta V_{IX2}$ ):** Do pomiarów użyto  $4\text{ i } \frac{1}{2}$  cyfrowego mikrowoltomierza w zakresie pomiarowym  $10\text{ mV}$  i granicach rozdzielczości  $\pm 0,5\ \mu\text{V}$  dla każdego wskazania.
- S5.8 Napięcie pasożytnicze ( $\delta V_R$ ):** Oszacowano, że szczątkowe napięcie pasożytnicze, powstające na zaciskach przełącznika wynosi  $(0 \pm 2)\ \mu\text{V}$ .
- S5.9 Temperatury odniesienia ( $\delta t_{0S}, \delta t_{0X}$ ):** Temperatura spoin odniesienia dla każdego termoelementu wynosi  $(0 \pm 0,1)^\circ\text{C}$ .
- S5.10 Napięciowe czułości termoelementów ( $C_S, C_X, C_{S0}, C_{X0}$ ):** Czułości termoelementów odczytano z tablic odniesienia:
- |                          | $1000^\circ\text{C}$                    | $0^\circ\text{C}$                          |
|--------------------------|---|--|
| termoelement odniesienia | $C_S = 0,077^\circ\text{C}/\mu\text{V}$ | $C_{S0} = 0,189^\circ\text{C}/\mu\text{V}$ |
| termoelement wzorcowany  | $C_X = 0,026^\circ\text{C}/\mu\text{V}$ | $C_{X0} = 0,039^\circ\text{C}/\mu\text{V}$ |
- S5.11 Dryf wzorca odniesienia ( $\delta t_D$ ):** Na podstawie przeprowadzonych wcześniej wzorcowań oszacowano, że dryf termoelementów odniesienia wynosi  $(0 \pm 0,3)^\circ\text{C}$ .
- S5.12 Gradienty temperatury ( $\delta t_F$ ):** Zmierzono gradienty temperatury wewnątrz pieca. Przy temperaturze  $1000^\circ\text{C}$  odchylenie uwzględniające niejednorodność temperatury w strefie pomiarowej wynosi  $\pm 1^\circ\text{C}$ .
- S5.13 Przewody kompensacyjne ( $\delta V_{LX}$ ):** Przewody kompensacyjne sprawdzono w zakresie temperatur od  $0^\circ\text{C}$  do  $40^\circ\text{C}$ . Na podstawie tych badań oszacowano, że różnice napięć pomiędzy przewodami kompensacyjnymi i termoelektrodami termoelementów znajdują się w przedziale  $\pm 5\ \mu\text{V}$ .
- S5.14 Pomiary ( $V_{IS}, t_S(V_{IS}), V_{IX}$ ):** Wskazania woltomierza rejestrowane są zgodnie z przedstawioną poniżej procedurą. Dla każdego termoelementu wykonano cztery odczyty napięcia, co zredukuje wpływ dryfu temperatury źródła ciepła (pieca) oraz wpływ napięcia pasożytniczego w obwodzie pomiarowym:

**I cykl:**

I termoelement odniesienia, termoelement wzorcowany, II termoelement odniesienia,  
II termoelement odniesienia, termoelement wzorcowany, I termoelement odniesienia.

Zmiana biegunowości (polaryzacji).

**II cykl:**

I termoelement odniesienia, termoelement wzorcowany, II termoelement odniesienia,

II termoelement odniesienia, termoelement wzorcowany, I termoelement odniesienia.

- S5.15** Procedura wymaga, aby różnica pomiędzy dwoma termoelementami odniesienia nie była większa niż  $\pm 0,3^{\circ}\text{C}$ . Jeżeli różnica przekracza tę wartość graniczną, pomiary należy powtórzyć i/lub zbadać przyczyny jej powstania.

| Termoelement  | I termoelement odniesienia | termoelement wzorcowany   | II termoelement odniesienia |
|---|----------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| <b>Wskazane napięcie, po uwzględnieniu poprawek</b> | + 10 500 $\mu\text{V}$     | + 36 245 $\mu\text{V}$    | + 10 503 $\mu\text{V}$      |
|   | + 10 503 $\mu\text{V}$     | + 36 248 $\mu\text{V}$    | + 10 503 $\mu\text{V}$      |
|   | - 10 503 $\mu\text{V}$     | - 36 248 $\mu\text{V}$    | - 10 505 $\mu\text{V}$      |
|   | - 10 504 $\mu\text{V}$     | - 36 251 $\mu\text{V}$    | - 10 505 $\mu\text{V}$      |
| <b>Wartość średnia napięcia</b>                     | 10 502,5 $\mu\text{V}$     | 36 248 $\mu\text{V}$      | 10 504 $\mu\text{V}$        |
| <b>Temperatura spoiny pomiarowej</b>                | 1000,4 $^{\circ}\text{C}$  |                           | 1000,6 $^{\circ}\text{C}$   |
| <b>Temperatura w piecu</b>                          |                            | 1000,5 $^{\circ}\text{C}$ |                             |

- S5.16** Z czterech wskazań każdego termoelementu, przedstawionych w powyższej tabeli, określono wartość średnią napięcia każdego termoelementu. Wartości napięcia powstającego w obwodach termoelementów odniesienia przekształcono w wartości temperatury stosując funkcję opisującą zależność temperatury i napięcia, podaną w ich świadectwach wzorcowania. Obserwowane wartości temperatury są w dużym stopniu skorelowane (współczynnik korelacji jest bliski jedności). Z tego powodu, obliczając ich wartość średnią połączone zostają tylko w jedną obserwację, która jest temperaturą w piecu w miejscu, w którym umieszczono termoelement wzorcowany. W podobny sposób otrzymano następnie tylko jedną obserwację napięcia wzorcowanego termoelementu. W celu wyznaczenia niepewności pomiaru związanej z tymi obserwacjami przeprowadzono wcześniej, w takiej samej temperaturze, serię dziesięciu pomiarów. Z takiej serii pomiarów otrzymano połączoną estymatę odchylenia standardowego temperatury w piecu oraz napięcia w obwodzie wzorcowanego termoelementu.

Odpowiednie niepewności standardowe wielkości mierzonych wynoszą:

połączona estymata odchylenia standardowego

$$s_p(t_s) = 0,10^{\circ}\text{C}$$

niepewność standardowa

$$u(t_s) = \frac{s_p(t_s)}{\sqrt{1}} = 0,10^{\circ}\text{C}$$

połączona estymata odchylenia standardowego

$$s_p(V_{ix}) = 1,6 \mu\text{V}$$

niepewność standardowa

$$u(V_{ix}) = \frac{s_p(V_{ix})}{\sqrt{1}} = 1,6 \mu\text{V}$$

**S5.17 Budżet niepewności (temperatura  $t_x$  w piecu):**

| symbol wielkości | estymata wielkości | niepewność standardowa | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności |
|------------------|--------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|--------------------|
| $X_i$            | $x_i$              | $u(x_i)$               |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$           |
| $t_s$            | 1000,5°C           | 0,10°C                 | normalny                   | 1,0                      | 0,10°C             |
| $\delta V_{is1}$ | 0 $\mu$ V          | 1,00 $\mu$ V           | normalny                   | 0,077°C/ $\mu$ V         | 0,077°C            |
| $\delta V_{is2}$ | 0 $\mu$ V          | 0,29 $\mu$ V           | prostokątny                | 0,077°C/ $\mu$ V         | 0,022°C            |
| $\delta V_R$     | 0 $\mu$ V          | 1,15 $\mu$ V           | prostokątny                | 0,077°C/ $\mu$ V         | 0,089°C            |
| $\delta t_{0s}$  | 0°C                | 0,058°C                | prostokątny                | -0,407                   | -0,023°C           |
| $\delta t_s$     | 0°C                | 0,15°C                 | normalny                   | 1,0                      | 0,15°C             |
| $\delta t_D$     | 0°C                | 0,173°C                | prostokątny                | 1,0                      | 0,173°C            |
| $\delta t_F$     | 0°C                | 0,577°C                | prostokątny                | 1,0                      | 0,577°C            |
| $t_x$            | 1000,5°C           |                        |                            |                          | 0,641°C            |

**S5.18 Budżet niepewności (siła termoelektryczna  $V_x$  wzorcowanego termoelementu):**

Niepewność standardowa związana z odchyleniem temperatury punktu wzorcowania od temperatury w piecu jest niepewnością standardową związaną z temperaturą w piecu, ponieważ temperatura punktu wzorcowania jest wartością zdefiniowaną (dokładnie znaną).

| symbol wielkości | estymata wielkości | niepewność standardowa | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności |
|------------------|--------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|--------------------|
| $X_i$            | $x_i$              | $u(x_i)$               |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$           |
| $V_{ix}$         | 36 248 $\mu$ V     | 1,60 $\mu$ V           | normalny                   | 1,0                      | 1,60 $\mu$ V       |
| $\delta V_{ix1}$ | 0 $\mu$ V          | 1,00 $\mu$ V           | normalny                   | 1,0                      | 1,00 $\mu$ V       |
| $\delta V_{ix2}$ | 0 $\mu$ V          | 0,29 $\mu$ V           | prostokątny                | 1,0                      | 0,29 $\mu$ V       |
| $\delta V_R$     | 0 $\mu$ V          | 1,15 $\mu$ V           | prostokątny                | 1,0                      | 1,15 $\mu$ V       |
| $\delta V_{Lx}$  | 0 $\mu$ V          | 2,9 $\mu$ V            | prostokątny                | 1,0                      | 2,9 $\mu$ V        |
| $\Delta t$       | 0,5°C              | 0,641°C                | normalny                   | 38,5 $\mu$ V/°C          | 24,5 $\mu$ V       |
| $\delta t_{0x}$  | 0°C                | 0,058°C                | prostokątny                | -25,6 $\mu$ V/°C         | -1,48 $\mu$ V      |
| $V_x$            | 36 229 $\mu$ V     |                        |                            |                          | 25,0 $\mu$ V       |

**S5.19 Niepewności rozszerzone**

Niepewność rozszerzona związana z pomiarem temperatury w piecu wynosi:

$$U = k \cdot u(t_x) = 2 \cdot 0,641 \text{ °C} \cong 1,3 \text{ °C}$$

Niepewność rozszerzona związana z wartością siły termoelektrycznej wzorcowanego termoelementu:

$$U = k \cdot u(V_X) = 2 \cdot 25,0 \mu\text{V} \cong 50 \mu\text{V}$$

#### **S5.20 Zapis wyniku pomiaru**

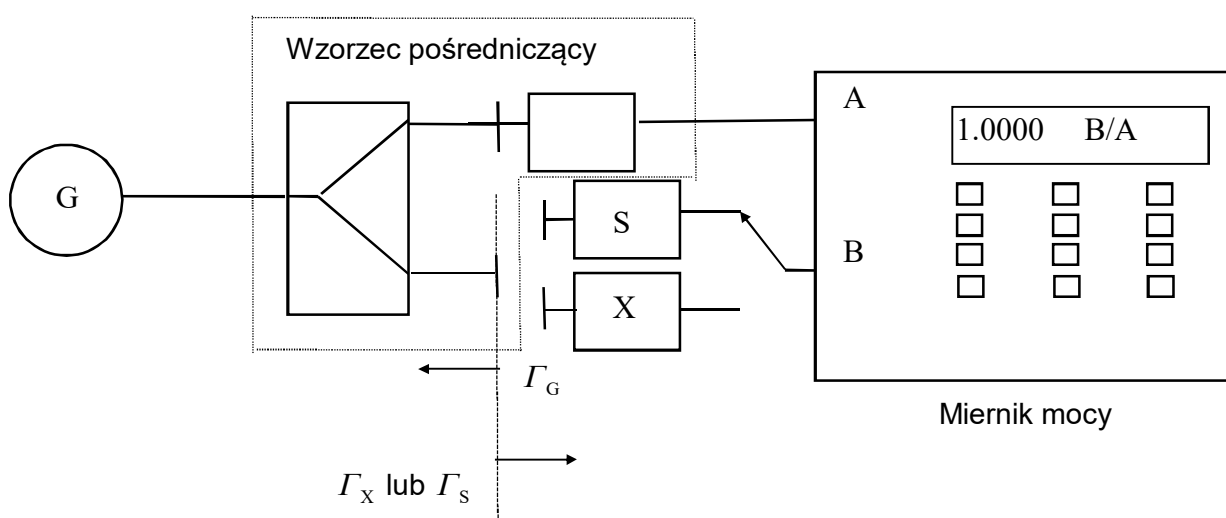
Siła termoelektryczna termoelementu typu N w temperaturze 1000,0°C, przy temperaturze spoiny odniesienia 0°C, wynosi 36 230  $\mu\text{V} \pm 50 \mu\text{V}$ .

Podana niepewność rozszerzona pomiaru została określona jako standardowa niepewność pomiaru pomnożona przez współczynnik rozszerzenia  $k = 2$ , który dla rozkładu normalnego odpowiada prawdopodobieństwu rozszerzenia ok. 95 %.

## S6 WZORCOWANIE CZUJNIKA MOCY PRZY CZĘSTOTLIWOŚCI 19 GHz

**S6.1** Pomiar dotyczy wzorcowania nieznanego czujnika mocy w odniesieniu do wywzorcowanego czujnika mocy użytego jako czujnik odniesienia. Oba czujniki są na zmianę podłączane do stabilnego wzorca pośredniczącego o znanym małym współczynniku odbicia. Pomiar jest wykonywany przy współczynniku kalibracji, który jest zdefiniowany jako stosunek mocy padającej przy częstotliwości odniesienia 50 MHz, do mocy padającej przy częstotliwości wzorcowania pod warunkiem, że obie moce padające powodują identyczną reakcję czujnika mocy. Dla każdej częstotliwości, za pomocą miernika podwójnego umożliwiającego pomiar ilorazu mocy, określa się stosunek mocy czujnika wzorcowanego odpowiednio do czujnika odniesienia i do wewnętrznego czujnika stanowiącego część wzorca pośredniczącego.

**S6.2** Schemat układu pomiarowego



**S6.3** Wielkość  $K$ , nazwana przez niektórych producentów „współczynnikiem kalibracji”, jest zdefiniowana jako:

$$K = \frac{P_{lr}}{P_{lc}} = \frac{(1 + |\Gamma_r|^2) P_{Ar}}{(1 + |\Gamma_c|^2) P_{Ac}} \quad (S6.1)$$

dla jednakowego wskazania mocy miernika

gdzie:

$P_{lr}$  - moc padająca przy częstotliwości odniesienia (50 MHz),

$P_{lc}$  - moc padająca przy częstotliwości wzorcowania,

$\Gamma_r$  - napięciowy współczynnik odbicia czujnika przy częstotliwości odniesienia,

$\Gamma_c$  - napięciowy współczynnik odbicia czujnika przy częstotliwości wzorcowania,

$P_{Ar}$  - moc absorbowana przez czujnik przy częstotliwości odniesienia,

$P_{Ac}$  - moc absorbowana przez czujnik przy częstotliwości wzorcowania.

**S6.4** Współczynnik kalibracji czujnika wzorcowanego opisany jest zależnością:

$$K_X = (K_S + \delta K_D) \frac{M_{Sr} M_{Xc}}{M_{Sc} M_{Xr}} p_{Cr} p_{Cc} p \quad (S6.2)$$

gdzie:

- $K_S$  - współczynnik kalibracji czujnika mocy odniesienia;
- $\delta K_D$  - zmiana współczynnika kalibracji czujnika mocy odniesienia od jego ostatniego wzorcowania spowodowana dryfem;
- $M_{Sr}$  - współczynnik niedopasowania czujnika odniesienia przy częstotliwości odniesienia;
- $M_{Sc}$  - współczynnik niedopasowania czujnika odniesienia przy częstotliwości wzorcowania;
- $M_{Xr}$  - współczynnik niedopasowania czujnika wzorcowanego przy częstotliwości odniesienia;
- $M_{Xc}$  - współczynnik niedopasowania czujnika wzorcowanego przy częstotliwości wzorcowania;
- $p_{Cr}$  - współczynnik poprawkowy uwzględniający nieliniowość i ograniczoną rozdzielczość miernika mocy dla ilorazu poziomu mocy przy częstotliwości odniesienia;
- $p_{Cc}$  - współczynnik poprawkowy uwzględniający nieliniowość i ograniczoną rozdzielczość miernika mocy dla ilorazu poziomu mocy przy częstotliwości wzorcowania;
- $p$  - iloraz współczynników mocy otrzymany z równania:

$$p = \frac{p_{Sr} p_{Xc}}{p_{Sc} p_{Xr}}$$

gdzie:

- $p_{Sr}$  - współczynnik mocy dla czujnika odniesienia przy częstotliwości odniesienia;
- $p_{Sc}$  - współczynnik mocy dla czujnika odniesienia przy częstotliwości wzorcowania;
- $p_{Xr}$  - współczynnik mocy dla czujnika wzorcowanego przy częstotliwości odniesienia;
- $p_{Xc}$  - współczynnik mocy dla czujnika wzorcowanego przy częstotliwości wzorcowania.

**S6.5 Czujnik odniesienia ( $K_S$ ):** Czujnik odniesienia był wywzorcowany sześć miesięcy przed użyciem go do wzorcowania czujnika mocy. Wartość współczynnika wzorcowania podana w świadectwie wzorcowania wyniosła  $(95,7 \pm 1,1) \%$  ( $k = 2$ ), co również można wyrazić jako  $0,957 \pm 0,011$ .

**S6.6 Dryf wzorca ( $\delta K_D$ ):** Dryf współczynnika wzorcowania wzorca odniesienia oszacowano na podstawie wykonywanych corocznie wzorcowań jako  $-0,002$  na rok z odchyleniem  $\pm 0,004$ . Na podstawie tych wartości oszacowano dryf czujnika odniesienia (wywzorcowanego pół roku wcześniej) jako równy  $-0,001$  z odchyleniem  $\pm 0,002$ .

**S6.7 Liniowość i rozdzielczość miernika mocy ( $p_{Cr}$ ,  $p_{Cc}$ ):** Wartości wskazywane przez miernik mocy z powodu jego nieliniowości, dla stosunku poziomu mocy przy częstotliwości odniesienia, są obciążone niepewnością rozszerzoną  $0,002$  ( $k = 2$ ) oraz, dla stosunku poziomu mocy przy częstotliwości wzorcowania, niepewnością  $0,0002$  ( $k = 2$ ). Wartości te otrzymano podczas wcześniejszych pomiarów. Z powodu użycia tego samego miernika mocy do określenia obu wartości  $p_S$  i  $p_X$ , składowe niepewności przy częstotliwości odniesienia i częstotliwości wzorcowania są skorelowane. Ponieważ rozważane są stosunki mocy dla obu częstotliwości, korelacja powoduje zmniejszenie niepewności. Z tego powodu należy rozważać jedynie względną różnicę wskazań, powstającą na skutek oddziaływań systematycznych (patrz uwaga w punkcie S3.12). Wynika stąd niepewność standardowa  $0,00142$  związana ze współczynnikiem

poprawkowym  $p_{Cr}$  oraz niepewność standardowa 0,000142 związana ze współczynnikiem poprawkowym  $p_{Cc}$ .

Niepewność rozszerzona ustalona dla wskazań miernika mocy zawiera wpływy nieliniowości i rozdzielczości. Wpływy nieliniowości są skorelowane, podczas gdy wpływy rozdzielczości są nieskorelowane. Jak pokazano w punkcie S3.12 zastosowanie ilorazu mocy eliminuje wpływ korelacji i zmniejsza niepewność standardową pomiaru związaną z tym ilorazem. W przedstawionych powyżej obliczeniach oddzielne skorelowane i nieskorelowane składowe nie są znane i podane wartości są górnymi granicami niepewności standardowej związanej z ilorazami. Budżet niepewności ostatecznie pokazuje, że składowe wynikające z tych ilorazów są nieistotne, co uzasadnia zastosowane przybliżenie.

**S6.8 Współczynniki niedopasowania ( $M_{Sr}$ ,  $M_{Sc}$ ,  $M_{Xr}$ ,  $M_{Xc}$ ):** Jeżeli układ pomiarowy z wzorcem pośredniczącym nie jest precyzyjnie dopasowany i nie są znane fazy współczynników odbicia wzorca pośredniczącego, czujnika wzorcowanego i czujnika odniesienia, wówczas niepewność będzie spowodowana niedopasowaniem każdego czujnika przy częstotliwości odniesienia i przy częstotliwości wzorcowania. Odpowiednie granice odchyłeń należy obliczyć dla częstotliwości odniesienia i częstotliwości wzorcowania z następującej zależności:

$$M_{S,X} = 1 \pm 2|\Gamma_G||\Gamma_{S,X}| \quad (S6.3)$$

gdzie moduły współczynników odbicia wzorca pośredniczącego, czujnika odniesienia i czujnika wzorcowanego wynoszą:

|              | 50 MHz | 18 GHz |
|--------------|--------|--------|
| $ \Gamma_G $ | 0,02   | 0,07   |
| $ \Gamma_S $ | 0,02   | 0,10   |
| $ \Gamma_X $ | 0,02   | 0,12   |

Rozkład prawdopodobieństwa poszczególnych składowych jest typu U. W związku z tym przy obliczaniu wariancji iloraz 1/3, typowy dla rozkładu prostokątnego należy zastąpić ilorazem 1/2, przyjmując połówkową wartość graniczną. Niepewność standardową spowodowaną niedopasowaniem otrzymuje się z:

$$u(M_{S,X}) = \frac{2|\Gamma_G||\Gamma_S|}{\sqrt{2}} \quad (S6.4)$$

Uwaga: Wartości współczynników odbicia są wynikami pomiarów, które również obarczone są niepewnością. Niepewność ta jest pierwiastkiem kwadratowym sumy kwadratu niepewności pomiaru i kwadratu wartości zmierzonej.

**S6.9 Korelacja:** Żadnej z wielkości wejściowych nie rozpatrywano jako wielkości w istotnym stopniu skorelowanej.

**S6.10 Pomiary ( $p$ ):** Przeprowadzono trzy oddzielne odczyty. W celu uwzględnienia powtarzalności połączenia za każdym razem wykonuje się rozłączenie i ponowne połączenie obu czujników (odniesienia i wzorcowanego) do wzorca pośredniczącego. Odczyty wskazań miernika mocy użyte do obliczenia ilorazu  $p$  są następujące:



| nr obs. | $p_{Sr}$ | $p_{Sc}$ | $p_{Xr}$ | $p_{Xc}$ | $p$    |
|---------|----------|----------|----------|----------|--------|
| 1       | 1,0001   | 0,9924   | 1,0001   | 0,9698   | 0,9772 |
| 2       | 1,0000   | 0,9942   | 1,0000   | 0,9615   | 0,9671 |
| 3       | 0,9999   | 0,9953   | 1,0001   | 0,9792   | 0,9836 |

średnia arytmetyczna:  $\bar{p} = 0,9760$

odchylenie standardowe eksperymentalne:  $s(p) = 0,0083$

niepewność standardowa  $u(p) = s(\bar{p}) = \frac{0,0083}{\sqrt{3}} = 0,0048$

### S6.11 Budżet niepewności ( $K_X$ ):

| symbol wielkości | estymata wielkości | niepewność standardowa | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności |
|------------------|--------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|--------------------|
| $X_i$            | $x_i$              | $u(x_i)$               |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$           |
| $K_S$            | 0,957              | 0,0055                 | normalny                   | 0,976                    | 0,00537            |
| $\delta K_D$     | -0,001             | 0,0012                 | prostokątny                | 0,976                    | 0,00113            |
| $M_{Sr}$         | 1,000              | 0,0006                 | typu U                     | 0,933                    | 0,00053            |
| $M_{Sc}$         | 1,000              | 0,0099                 | typu U                     | -0,933                   | 0,00924            |
| $M_{Xr}$         | 1,000              | 0,0006                 | typu U                     | -0,933                   | -0,00053           |
| $M_{Xc}$         | 1,000              | 0,0119                 | typu U                     | 0,933                    | 0,01110            |
| $p_{Cr}$         | 1,000              | 0,0014                 | normalny                   | 0,933                    | 0,00132            |
| $p_{Cc}$         | 1,000              | 0,0001                 | normalny                   | 0,933                    | 0,00013            |
| $p$              | 0,976              | 0,0048                 | normalny                   | 0,956                    | 0,00459            |
| $K_X$            | 0,933              |                        |                            |                          | 0,01623            |

### S6.12 Niepewność rozszerzona:

$$U = k \cdot u(K_X) = 2 \cdot 0,01623 \cong 0,032$$

Chociaż wyznaczenie  $p$  opiera się tylko na trzech wartościach (a więc  $v = 2$ ), udział  $p$  w całkowitej niepewności wynosi około 1/4, a zatem efekt słabszej jakości oszacowania  $u_p$  jest zmniejszony. W związku z tym można zastosować standardowy współczynnik rozszerzenia  $k=2$ . W rzeczywistości w budżecie powinno być wyliczenie  $v_{\text{eff}}$  zgodnie z załącznikiem E ( $V_{\text{eff}} \sim 310$ ).

### S6.13 Zapis wyniku pomiaru:

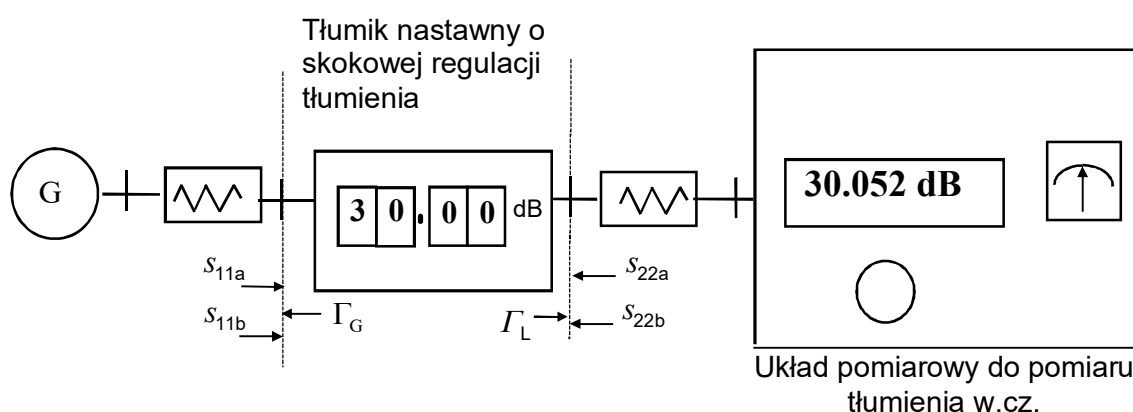
Współczynnik wzorcowania czujnika mocy przy częstotliwości 18 GHz wynosi  $0,933 \pm 0,032$ , co może być również wyrażone jako  $(93,3 \pm 3,2) \%$ .

Podana niepewność pomiaru rozszerzona została określona jako niepewność standardowa pomnożona przez współczynnik rozszerzenia  $k = 2$ , co dla rozkładu normalnego odpowiada prawdopodobieństwu rozszerzenia około 95 %.

## S7 WZORCOWANIE WSPÓŁOSIOWEGO TŁUMIKA NASTAWNEGO O SKOKOWEJ REGULACJI TŁUMIENIA DLA NASTAWY 30 dB (STRATY PRZYROSTOWE)

**S7.1** Pomiar dotyczy wzorcowania współosiowego tłumika nastawnego o skokowej regulacji tłumienia przy częstotliwości 10 GHz. Do pomiaru wykorzystano układ pomiarowy zawierający wywzorcowany współosiowy tłumik nastawny o skokowej regulacji tłumienia działający jako tłumienie odniesienia. Metoda pomiarowa polega na określeniu tłumienia pomiędzy dopasowanym źródłem i dopasowanym obciążeniem. Wzorcowany współosiowy tłumik nastawny o skokowej regulacji tłumienia jest przełączany pomiędzy nastawami 0 i 30 dB i podczas pomiaru określana jest wartość tłumienia (straty przyrostowe). Układ pomiarowy do pomiaru tłumienia zawiera cyfrowy wyświetlacz oraz analogowy detektor zera, służący do sygnalizacji warunku równowagi.

**S7.2** Schemat układu pomiarowego:



**S7.3** Tłumienie  $L_X$  wzorcowanego tłumika jest określone z następującego wyrażenia:

$$L_X = L_S + \delta L_S + \delta L_D + \delta L_M + \delta L_K + \delta L_{ib} - \delta L_{ia} + \delta L_{0b} - \delta L_{0a} \quad (S7.1)$$

gdzie:

- $L_S = L_{ib} - L_{ia}$  - różnica tłumienia tłumika odniesienia
- $L_{ia}$  - wskazane tłumienie wzorcowanego tłumika dla nastawy 0 dB;
- $L_{ib}$  - wskazane tłumienie wzorcowanego tłumika dla nastawy 30 dB;
- $\delta L_S$  - poprawka wyznaczona podczas wzorcowania tłumika odniesienia;
- $\delta L_D$  - zmiana tłumienia tłumika odniesienia w okresie od jego ostatniego wzorcowania, spowodowana dryfem;
- $\delta L_M$  - poprawka spowodowana stratami niedopasowania;
- $\delta L_K$  - poprawka na przesłuch pomiędzy wejściem i wyjściem wzorcowanego tłumika spowodowana niedoskonałą izolacją;
- $\delta L_{ia}, \delta L_{ib}$  - poprawka spowodowana ograniczoną rozdzielczością detektora odniesienia dla nastaw 0 dB i 30 dB;
- $\delta L_{0a}, \delta L_{0b}$  - poprawki spowodowane ograniczoną rozdzielczością detektora zera dla nastaw 0 dB i 30 dB.

**S7.4** **Tłumik odniesienia ( $\delta L_S$ ):** W świadectwie wzorcowania tłumika odniesienia podano wartość tłumienia 30,003 dB, przy 10 GHz dla nastawy 30,000 dB, i niepewność rozszerzoną 0,005 dB ( $k = 2$ ). Poprawka +0,003 i jej niepewność rozszerzona 0,005

dB ( $k = 2$ ) są rozważane dla tych przypadków, gdy nastawy tłumienia tłumika odniesienia nie różnią się o więcej niż  $\pm 0,1$  dB od nastawy wywzorcowanego tłumika wynoszącej 30,000 dB.

**S7.5 Dryf odniesienia ( $\delta L_D$ ):** Dryf tłumienia tłumika odniesienia oszacowano na podstawie danych z wcześniejszych wzorcowań i ustalono, że wynosi  $0 \pm 0,002$  dB.

**S7.6 Straty niedopasowania ( $\delta L_M$ ):** Współczynniki odbicia źródła i obciążenia w płaszczyznach połączenia tłumika wzorcowanego zoptymalizowano poprzez dopasowanie impedancji tak, by uzyskać możliwie najmniejsze wartości. Zmierzono te moduły oraz moduły współczynników rozproszenia wzorcowanego tłumika, ale ich faza pozostaje nieznana. Bez informacji dotyczących faz nie można wyznaczyć poprawki na niedopasowanie; lecz niepewność standardową (w dB) spowodowaną niepełną wiedzą o dopasowaniu można oszacować za pomocą następującego równania [1]:

$$u(\delta L_M) = \frac{8,686}{\sqrt{2}} \sqrt{|\Gamma_S|^2 (|s_{11a}|^2 + |s_{11b}|^2) + |\Gamma_L|^2 (|s_{22a}|^2 + |s_{22b}|^2) + |\Gamma_S|^2 \times |\Gamma_L|^2 (|s_{21a}|^4 + |s_{21b}|^4)} \quad (S7.2)$$

Po podstawieniu współczynników odbicia źródła i obciążenia równych:

$$\Gamma_S = 0,03 \text{ i } \Gamma_L = 0,03$$

oraz współczynników rozproszenia wzorcowanego tłumika przy 10 GHz:

|          | 0 dB | 30 dB |
|----------|------|-------|
| $s_{11}$ | 0,05 | 0,09  |
| $s_{22}$ | 0,01 | 0,01  |
| $s_{21}$ | 0,95 | 0,031 |

otrzymujemy  $u(\delta L_M) = 0,02$  dB.

Uwaga: Wartości współczynników rozproszenia i odbicia są wynikami pomiarów, które nie są dokładnie znane. Zostało to uwzględnione przez dodanie pod pierwiastkiem kwadratowym kwadratu niepewności wyniku pomiaru i kwadratu wartości zmierzonej.

**S7.7 Poprawka na przesłuch ( $\delta L_K$ ):** Przesłuch sygnałów we wzorcowanym tłumiku oszacowano, na podstawie pomiarów wykonanych przy nastawie 0 dB, na 100 dB poniżej poziomu sygnału mierzonego. Z danych tych oszacowano dla nastawy 30 dB poprawkę na przesłuch w granicach  $\pm 0,003$  dB.

**S7.8 Rozdzielczość nastaw tłumika odniesienia ( $\delta L_{ia}$ ,  $\delta L_{ib}$ ):** Cyfrowy odczyt tłumika odniesienia ma rozdzielczość 0,001 dB, z której można oszacować poprawkę na rozdzielczość wynoszącą  $\pm 0,0005$  dB.

**S7.9 Rozdzielczość detektora zera ( $\delta L_{0a}$ ,  $\delta L_{0b}$ ):** Na podstawie wcześniej przeprowadzonych obliczeń ustalono, że rozdzielczość detektora zera charakteryzuje się odchyleniem standardowym 0,002 dB dla każdego odczytu, przy założeniu rozkładu normalnego.

**S7.10 Korelacja:** Żadnej z wielkości wejściowych nie rozpatrywano jako wielkości w istotnym stopniu skorelowanej.

**S7.11 Pomiary:** Przeprowadzono cztery obserwacje strat przyrostowych pomiędzy nastawami 0 dB i 30 dB wzorcowanego tłumika:

| Nr obserwacji | wartości obserwowane |               |
|---------------|----------------------|---------------|
|               | nastawa 0 dB         | nastawa 30 dB |
| 1             | 0,000 dB             | 30,033 dB     |
| 2             | 0,000 dB             | 30,058 dB     |
| 3             | 0,000 dB             | 30,018 dB     |
| 4             | 0,000 dB             | 30,052 dB     |

średnia arytmetyczna:  $\bar{L}_S = 30,040$  dB

odchylenie standardowe eksperymentalne:  $s(L_S) = 0,018$  dB

niepewność standardowa:  $u(L_S) = s(\bar{L}_S) = \frac{0,018 \text{ dB}}{\sqrt{4}} = 0,009$  dB

**S7.12 Budżet niepewności ( $L_X$ ):**

| symbol wielkości | estymata wielkości | niepewność standardowa | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności |
|------------------|--------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|--------------------|
| $X_i$            | $x_i$              | $u(x_i)$               |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$           |
| $L_S$            | 30,040 dB          | 0,0090 dB              | normalny                   | 1,0                      | 0,0090 dB          |
| $\delta L_S$     | 0,003 dB           | 0,0025 dB              | prostokątny                | 1,0                      | 0,0025 dB          |
| $\delta L_D$     | 0 dB               | 0,0012 dB              | prostokątny                | 1,0                      | 0,0012 dB          |
| $\delta L_M$     | 0 dB               | 0,0198 dB              | typu U                     | 1,0                      | 0,0198 dB          |
| $\delta L_K$     | 0 dB               | 0,0017 dB              | prostokątny                | 1,0                      | 0,0017 dB          |
| $\delta L_{ia}$  | 0 dB               | 0,0003 dB              | prostokątny                | -1,0                     | -0,0003 dB         |
| $\delta L_{ib}$  | 0 dB               | 0,0003 dB              | prostokątny                | 1,0                      | 0,0019 dB          |
| $\delta L_{0a}$  | 0 dB               | 0,0020 dB              | normalny                   | -1,0                     | 0,0020 dB          |
| $\delta L_{0b}$  | 0 dB               | 0,0020 dB              | normalny                   | 1,0                      | -0,0020 dB         |
| $L_X$            | 30,043 dB          |                        |                            |                          | 0,0223 dB          |

**S7.13 Niepewność rozszerzona:**

$$U = k \cdot u(L_X) = 2 \cdot 0,0223 \text{ dB} \cong 0,0446 \text{ dB}$$

Niepewność standardowa **złożona**  $u_c$  wynosi około 2,5 razy  $u_{L_S}$ , jedyny udział z ograniczonymi stopniami swobody,  $\nu = n - 1 = 3$ . Stąd  $\nu_{\text{eff}} \sim 3 \cdot (2,5)^4 \sim 100$ , i użycie  $k=2$  jest uzasadnione.

**S7.14 Zapis wyniku pomiaru:**

Wartość zmierzona tłumika nastawnego o skokowej regulacji tłumienia dla nastawy 30 dB przy częstotliwości 10 GHz wynosi  $(30,043 \pm 0,045)$  dB.

Podana niepewność pomiaru rozszerzona jest wyrażona jako odchylenie standardowe pomnożone przez współczynnik rozszerzenia  $k = 2$ , co dla rozkładu normalnego odpowiada prawdopodobieństwu rozszerzenia około 95 %.

**S7.15 Dokumenty odniesienia**

- [1] Harris, I. A., Warner, F. L.: *Re-examination of mismatch uncertainty when measuring microwave power and attenuation*. In: IEE Proc., Vol. 128, Pt. H, No. 1, Febr. 1981

## **SUPLEMENT 2**

### **Przykłady**

## S8 WPROWADZENIE

- S8.1** Przykłady zamieszczone w niniejszym Suplemencie, które uzupełniają Suplement 1, przedstawiają dodatkowe metody **oceny** niepewności pomiaru. Niniejszy zestaw przykładów skupia się na sytuacjach, w których mamy do czynienia z jednym lub dwoma członami dominującymi w równaniu opisującym propagację niepewności lub z małą liczbą powtórzonych pomiarów.
- S8.2** Przykłady dobrano tak, aby pokazać sytuacje spotykane w praktyce. Należy jednak podkreślić, że w przypadkach, gdy celem jest praktyczne zastosowanie omawianej metody, nie ma potrzeby gruntownego zapoznawania się z podstawami matematycznymi przedstawionymi w tych przykładach, a w szczególności w uwagach dołączonych do niektórych z nich. Sugeruje się, aby użytkownik, po zapoznaniu się z warunkami, które muszą być spełnione, zastosował wyniki wyvodu teoretycznego. Na przykład, jeżeli w danej sytuacji jest pewne, że wyniki pomiarów mają rozkład prostokątny (taki wypadek będzie miał miejsce, jeżeli w równaniu propagacji niepewności pozostanie do uwzględnienia tylko jeden człon, charakteryzujący się rozkładem prostokątnym), można wówczas przyjąć, że współczynnik rozszerzenia wyniesie  $k = 1,65$  dla prawdopodobieństwa rozszerzenia 95 % (por. punkt S9.14).
- S8.3** Ogólnym wnioskiem wynikającym z zasady propagacji niepewności jest stwierdzenie, że w przypadku tylko jednej składowej dominującej pod względem wartości rozkład tej składowej jest jednocześnie rozkładem wyniku pomiaru. Jak zwykle, w celu obliczenia niepewności wyniku pomiaru należy użyć odpowiedniego współczynnika wrażliwości.
- S8.4** Trzeba dodać, że spotyka się sytuacje, w których występowanie jednego lub kilku członów dominujących w równaniu niepewności jest często spowodowane zastosowaniem mniej skomplikowanych przyrządów pomiarowych często mających ograniczoną rozdzielność. Może się zatem wydawać paradoksalne, że ocena niepewności pomiaru w przypadku mniej skomplikowanych przyrządów pomiarowych jest - o czym świadczą przykłady zamieszczone w niniejszym Suplemencie - bardziej skomplikowane niż dla przykładów z Suplementu 1, dla których zastosowano prostsze procedury. Należy jednak pamiętać, że rozwiązania matematyczne, które niektórzy czytelnicy mogą uznać za utrudnienie, zamieszczono dla celów dydaktycznych tam, gdzie są potrzebne do bezpośredniego wyjaśniania zastosowanych metod obliczeniowych, a nie przedstawiono ich w głównym dokumencie.
- S8.5** Przykłady opierają się na projektach przygotowanych przez Grupy Ekspertów EA. Propozycje te uproszczono i ujednolicono tak, aby były zrozumiałe dla pracowników laboratoriów we wszystkich dziedzinach, w których wykonuje się wzorcowanie. Autorzy żywią nadzieję, że prezentowany w niniejszym Suplemencie zestaw przykładów, podobnie jak poprzedzający go zbiór opublikowany jako Suplement 1, przyczyni się do lepszego zrozumienia szczegółów tworzenia modelu pomiarowego i do ujednoczenia metody **oceny** niepewności pomiaru, niezależnie od dziedziny, której dotyczy wzorcowanie.
- S8.6** Rodzaje składowych niepewności pomiaru oraz ich wartości liczbowe podane w przykładach nie mają na celu sugerowania jakichkolwiek wymagań, czy to obowiązkowych, czy w formie preferencji. Laboratoria powinny określać składowe niepewności na podstawie funkcji pomiaru, którą stosują do oceny określonego wzorcowania i podać **ocenioną** niepewność pomiaru w wydanym przez siebie świadectwie wzorcowania.
- S8.7** Przykłady opracowano zgodnie ze schematem ogólnym zastosowanym w Suplemencie 1 do EA-4/02. Czytelnik znajdzie szczegóły w punkcie S1.4 cytowanego opracowania.

- S8.8** Przeprowadzona w przykładach analiza niepewności ma odzwierciedlać fizyczne podstawy określonego procesu pomiarowego oraz metody oceny wyników pomiaru i związanej z nimi niepewności. Aby analiza była przejrzysta także dla tych, którzy nie są specjalistami w określonej dziedzinie metrologicznej, w wyborze symboli poszczególnych wielkości zastosowano ujednoliconą metodykę uwzględniającą bardziej podstawy fizyczne niż bieżącą praktykę stosowaną w różnych dziedzinach pomiarów.
- S8.9** We wszystkich rozpatrywanych przypadkach występują wielkości różnych rodzajów. Jedną z nich jest mezurand, drugą - wielkość reprezentowana przez wzorzec roboczy, który jest realizacją jednostki miary; mezurand jest porównywany z jednostką miary. Oprócz tych dwóch wielkości, we wszystkich wypadkach mamy do czynienia z kilkoma innymi, które pełnią rolę wielkości dodatkowych lub poprawek.
- S8.10** Poprawki opisują brak równości między wielkością mierzoną a wynikiem pomiaru. Niekiedy wartość poprawki wynika z ostatecznego wyniku pomiaru, tj. z wartości otrzymanej w wyniku pomiaru i związanej z nim niepewności pomiaru. W innych wypadkach rozkład wartości poprawek przyjmuje się na podstawie mniej lub bardziej gruntownej wiedzy na temat ich charakteru. W większości wypadków prowadzi to do oszacowania granic dla nieznanymi odchyleń.
- S8.11** W niektórych przypadkach wielkość reprezentowaną przez wzorzec roboczy charakteryzuje się za pomocą wartości nominalnej. W ten sposób wartości nominalne, które – ogólnie mówiąc – charakteryzują lub identyfikują wzorce i przyrządy pomiarowe stosowane do wzorcowania, często biorą udział w analizie niepewności.
- S8.12** Dla zasygnalizowania różnicy między tymi pojęciami w matematycznych modelach obliczeniowych, zastosowanych w przytoczonych przykładach, posłużono się wyjaśnionymi poniżej regułami dotyczącymi symboliki. Jest sprawą oczywistą, iż ścisłe przestrzeganie takich reguł nie jest możliwe, ponieważ różne dziedziny pomiarowe stosują różną praktykę w kwestii użycia symboli.
- S8.13** Zastosowana notacja wprowadza rozróżnienie między wartościami głównymi, wartościami nominalnymi, wartościami poprawek i wartościami granicznymi.

Wartości główne są to wartości mierzone lub obserwowane, które stanowią najistotniejszy składnik wartości mezurandu. Przedstawia się je za pomocą małych liter drukowanych kursywą. Jeżeli wielkości reprezentują różnice, są one poprzedzane przez grecką wielką literę delta.

PRZYKŁAD:

- $t_{ix}$  – temperatura wskazana przez wzorcowany termometr (indeks  $i$  – symbolizuje wskazanie)  
 $\Delta l$  – zmierzona różnica przemieszczenia końcówki pomiarowej

Wartości nominalne są to wartości przypisane realizacji wielkości przez wzorzec lub przyrząd pomiarowy. Stanowią one wartości przybliżone, będące głównymi składowymi wartości odtwarzanych. Przedstawia się je za pomocą wielkich liter pisanych kursywą.

PRZYKŁAD:

$L$  – długość nominalna płytki wzorcowej.

Wartości poprawek opisują małe odchylenia od wartości głównych, które są znane lub muszą być oszacowane. W większości wypadków są one addytywne. Przedstawia się je za pomocą symbolu wybranego dla danej wielkości poprzedzonego małą grecką literą delta.



PRZYKŁAD:

- $m_D$  – hipotetyczne odchylenie spowodowane zmianą wartości wzorca masy odniesienia od czasu jego ostatniego wzorcowania (dryf),
- $m_C$  – poprawka na wpływ przesunięcia środka ciężkości obciążenia i oddziaływanie pola magnetycznego podczas wzorcowania wzorca masy.

Wartości graniczne są to oszacowane stałe wartości reprezentujące zakres prawdopodobnej zmienności nieznanych wartości danej wielkości. Przedstawia się je za pomocą symbolu wybranego dla danej wielkości poprzedzonego wielką grecką literą delta.

PRZYKŁAD:

- $x$  – oszacowana szerokość połówkowa przedziału prognozowanego odchylenia wartości liniowego temperaturowego współczynnika rezystywności, podanej przez wytwórcę w dokumentacji technicznej wzorcowanego rezystora.

Jak pokazano na przykładach indeksy służą zróżnicowaniu między różnymi wielkościami tego samego rodzaju. Zachowano przy tym międzynarodowe zasady stosowania indeksów w oznaczeniach wielkości fizycznych: indeksy reprezentujące wielkości fizyczne są drukowane kursywą, natomiast indeksy oznaczające wzorce i przyrządy pomiarowe są drukowane czcionką prostą.

**S8.14** Zdefiniowane wartości odniesienia są przedstawiane przez symbole wielkości z indeksem zero.

PRZYKŁAD:

$p_0$  – ciśnienie odniesienia, np. 1 000 mbar.

**S8.15** Ilorazy wielkości tego samego rodzaju (ułamki bezwymiarowe) przedstawia się za pomocą małych liter drukowanych kursywą.

PRZYKŁAD:

$r = R_{iX} / R_{iN}$  – iloraz rezystancji wskazanych odpowiednio dla rezystora wzorcowanego i rezystora odniesienia (indeks i – symbolizuje wskazanie).

**S8.16** W przypadku użycia kilku indeksów ich kolejność jest taka, że indeks odpowiadający pojęciu najbardziej ogólnemu zajmuje skrajne położenie po lewej stronie, natomiast indeks odpowiadający pojęciu najbardziej szczegółowemu – skrajne położenie po prawej stronie.

PRZYKŁAD:

$V_{11}, V_{12}$  – napięcie wskazane odpowiednio przez woltomierz "1" oraz woltomierz "2".

**S8.17** Przykłady podane w niniejszym Suplemencie autorzy zamierzają w przyszłości uzupełnić innymi, ilustrującymi różne zagadnienia związane z wzorcowaniem przyrządów pomiarowych. Przykłady można też znaleźć w przewodnikach EA poświęconych wzorcowaniu specyficznych rodzajów przyrządów pomiarowych.

**S9 WZORCOWANIE RĘCZNEGO MULTIMETRU CYFROWEGO DLA NAPIĘCIA 100 V**

**S9.1** Elementem wzorcowania ręcznego multimetru cyfrowego jest jego wzorcowanie sygnałem pomiarowym stałoprądowym o napięciu 100 V z użyciem wielofunkcyjnego kalibratora jako wzorca roboczego. Procedura pomiarowa obejmuje następujące czynności:

- (1) Połączenie wyjściowych zacisków kalibratora z wejściowymi zaciskami multimetru cyfrowego za pomocą odpowiednich przewodów pomiarowych.
- (2) Nastawienie kalibratora na sygnał pomiarowy o napięciu 100 V oraz odczytanie wskazań multimetru cyfrowego po odpowiednim czasie wymaganym dla stabilizacji wartości wskazania.
- (3) Obliczenie błędu wskazania multimetru cyfrowego na podstawie wartości jego wskazania oraz wartości nastawy kalibratora.

**S9.2** Należy zauważyć, że błąd wskazania multimetru cyfrowego otrzymany na podstawie powyższej procedury pomiarowej obejmuje zarówno uchyb w stanie ustalonym, jak i odchylenie od liniowości.

**S9.3** Błąd wskazania  $E_X$  wzorcowanego multimetru cyfrowego oblicza się z równania

$$E_X = V_{ix} - V_s + \delta V_{ix} - \delta V_s \quad (\text{S9.1})$$

gdzie

$V_{ix}$  - wartość napięcia wskazana przez multimetr cyfrowy (indeks i – symbolizuje wskazanie),

$V_s$  - wartość napięcia generowanego przez kalibrator,

$\delta V_{ix}$  - poprawka wskazanej wartości napięcia spowodowana ograniczoną rozdzielczością wskazań multimetru cyfrowego,

$\delta V_s$  - poprawka wartości napięcia kalibratora, na którą składają się następujące czynniki:

- (1) dryf od czasu ostatniego wzorcowania kalibratora,
- (2) zmiany obejmujące połączony efekt oddziaływania offsetu, nieliniowości i zmian współczynnika wzmocnienia ,
- (3) zmiany temperatury otoczenia,
- (4) zmiany napięcia zasilania,
- (5) wpływ obciążenia wynikający ze skończonej rezystancji wejściowej wzorcowanego multimetru cyfrowego.

**S9.4** Na skutek określonego poziomu rozdzielczości wskazań multimetru cyfrowego nie obserwuje się rozrzutu wskazanych wartości.

**S9.5 Wskazania multimetru cyfrowego ( $V_{ix}$ )**

Przy wartości nastawy kalibratora równej 100 V wartość wskazana przez multimetr cyfrowy wynosi 100,1 V. Przyjmuje się, że jest to wartość dokładna (por. punkt S9.4).

**S9.6 Wzorzec roboczy ( $V_s$ )**

Świadectwo wzorcowania kalibratora wielofunkcyjnego stwierdza, że wartość generowanego przezeń napięcia jest równa wartości nastawy, a związana z tą wartością względna niepewność pomiaru wynosi  $W = 0,000\ 02$  ( $k = 2$ ), co daje rozszerzoną niepewność pomiaru związaną z nastawą o wartości 100 V równą  $U = 0,002\ V$  ( $k = 2$ ).

**S9.7 Rozdzielczość wzorcowanego multimetru cyfrowego ( $\delta V_{ix}$ )**

Ostatnia znacząca cyfra wskazania multimetru cyfrowego odpowiada 0,1 V. Z każdym wskazaniem multimetru cyfrowego związana jest poprawka wynikająca z ograniczonej rozdzielczości wskazań. Poprawkę tę oszacowano na 0,0 V przy wartościach granicznych odchyłeń równych  $\pm 0,05\ V$  (tj. odpowiadających połowie wartości ostatniej cyfry znaczącej).

**S9.8 Inne poprawki ( $\delta V_s$ )**

**Ze względu na fakt, że poszczególne dane nie są dostępne, niepewność pomiaru związana z różnymi źródłami wynika ze specyfikacji dokładności podanej przez producenta kalibratora. Ze specyfikacji wynika, że wartość napięcia wytwarzanego przez kalibrator odpowiada – z odchyleniem zawartym w granicach  $\pm(0,000\ 1 \cdot V_s + 1\ mV)$ <sup>2</sup> – wartości jego nastawy w następujących warunkach pomiarowych:**

- (1) temperatura otoczenia: od 18 °C do 23 °C,
- (2) napięcie zasilania kalibratora: od 210 V do 250 V,
- (3) obciążenie rezystancyjne na końcówkach kalibratora: większe niż 100 k $\Omega$ ,
- (4) okres, który upłynął od ostatniego wzorcowania kalibratora: krótszy niż rok.

Ponieważ powyższe warunki pomiaru są spełnione, a dane pochodzące z kolejnych czynności wzorcowania kalibratora dowodzą, że na informacji **producenta** można polegać, przyjęto, iż poprawka odnosząca się do wartości napięcia generowanego przez kalibrator wynosi 0,0 V z niepewnością w granicach zmienności  $\pm 0,011\ V$ .

**S9.9 Korelacja**

Żadnej z wielkości wejściowych nie uznano za znacząco skorelowaną.

<sup>2</sup> Powszechnie używany w dokumentacji technicznej i instrukcjach obsługi sposób podawania informacji dotyczących dokładności przyrządów pomiarowych polega na przedstawianiu wartości granicznych odchyłeń w zależności od wartości nastawy. W przypadku kalibratora informacja wytwórcy o dokładności tego przyrządu przyjmie postać  $\pm(0,01\% \text{ wartości nastawy} + 1\ mV)$ . Nawet jeśli ten zapis uzna się za równorzędny wyrażeniu podanemu powyżej, nie został on w niniejszym tekście wykorzystany, ponieważ w wielu wypadkach może on wprowadzać w błąd oraz nie odpowiada równaniu wielkości fizycznych zgodnemu z notacją przyjętą na szczeblu międzynarodowym.

**S9.10 Budżet niepewności ( $E_x$ )**

| symbol wielkości<br>$X_i$ | estymata wielkości<br>$x_i$ | niepewność standardowa<br>$u(x_i)$ | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości<br>$c_i$ | udział niepewności<br>$u_i(y)$ |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| $V_{ix}$                  | 100,1 V                     | –                                  | –                          | –                                 | –                              |
| $V_s$                     | 100,0 V                     | 0,001 V                            | normalny                   | -1,0                              | -0,001 V                       |
| $\delta V_{ix}$           | 0,0 V                       | 0,029 V                            | prostokątny                | 1,0                               | 0,029 V                        |
| $\delta V_s$              | 0,0 V                       | 0,0064 V                           | prostokątny                | -1,0                              | -0,0064 V                      |
| $E_x$                     | 0,1 V                       |                                    |                            |                                   | 0,030 V                        |

**S9.11 Niepewność rozszerzona**

Największy udział w standardowej niepewności pomiaru związanej z wynikiem wzorcowania ma składowa spowodowana ograniczoną rozdzielczością wskazania multimetru cyfrowego. Finalny rozkład nie jest rozkładem normalnym, lecz w zasadzie prostokątnym. Dlatego metoda efektywnych stopni swobody opisana w Załączniku E nie ma w tym przypadku zastosowania. Odpowiedni dla rozkładu prostokątnego współczynnik rozszerzenia obliczono na podstawie zależności wyrażonej równaniem (S9.8) zamieszczonym w punkcie S9.14 dotyczącym podstaw matematycznych.

$$U = k \cdot u(E_x) = 1,65 \cdot 0,030 \text{ V} \cong 0,05 \text{ V}$$

**S9.12 Zapis wyniku pomiaru**

Błąd wskazania ręcznego woltomierza cyfrowego wyznaczony dla napięcia 100 V wynosi  $(0,10 \pm 0,05) \text{ V}$ .

Podaną niepewność pomiaru rozszerzoną wyrażono jako standardową niepewność pomiaru pomnożoną przez współczynnik rozszerzenia  $k = 1,65$ , którego wartość obliczono na podstawie przyjętego prostokątnego rozkładu prawdopodobieństwa dla prawdopodobieństwa rozszerzenia 95 %.

**S9.13 Uwaga dodatkowa**

Metoda obliczenia współczynnika rozszerzenia jest ściśle związana z faktem, że niepewność pomiaru związana z wynikiem jest zdominowana przez efekt ograniczonej rozdzielczości multimetru cyfrowego. Ta sama zasada jest słuszna w przypadku wzorcowania wszelkich przyrządów pomiarowych o niskiej rozdzielczości pod warunkiem, że ich ograniczona rozdzielczość jest jedynym źródłem dominującym w budżecie niepewności.

**S9.14 Podstawy matematyczne**

Dla pomiaru, w którym jedną ze składowych niepewności można określić jako dominującą pod względem wartości – założmy, że jest to składowa oznaczona indeksem "1" – niepewność standardową związaną z wynikiem pomiaru  $y$  można zapisać jako

$$u(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_R^2(y)} \quad (\text{S9.2})$$

gdzie

$$u_R(y) = \sqrt{\sum_{i=2}^N u_i^2(y)} \quad (\text{S9.3})$$

oznacza całkowity udział składowych niedominujących niepewności pomiaru. Jeżeli iloraz wartości całkowitego udziału  $u_R(y)$  składowych niedominujących niepewności do składowej dominującej  $u_1(y)$  nie przekracza 0,3 równanie (S9.2) można w przybliżeniu przedstawić w następującej formie:

$$u(y) \cong u_1(y) \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{u_R(y)}{u_1(y)} \right)^2 \right] \quad (\text{S9.4})$$

Błąd względny przybliżenia jest mniejszy niż  $1 \cdot 10^{-3}$ . Maksymalna względna zmiana wartości niepewności standardowej wprowadzona przez czynnik w nawiasie kwadratowym z równania (S9.4) nie przekracza 5 %. Jest to wartość dopuszczalna, stosowana przy zaokrąglaniu wartości niepewności.

Przy tych założeniach rozkład wartości, które mogą być w sposób uzasadniony przypisane mezurandowi jest zasadniczo identyczny z rozkładem określonym dla znanej składowej dominującej. Z funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa  $\varphi(y)$  można dla każdej wartości niepewności rozszerzonej  $U$  określić prawdopodobieństwo rozszerzenia  $p$  przez obliczenie następującej całki:

$$p(U) = \int_{y-U}^{y+U} \varphi(y') dy' \quad (\text{S9.5})$$

Przekształcenie odwrotne dla danego prawdopodobieństwa rozszerzenia  $p$  daje relacja  $U=U(p)$  pomiędzy niepewnością pomiaru rozszerzoną a prawdopodobieństwem dla danej funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa  $\varphi(y)$ . Na podstawie tej zależności współczynnik rozszerzenia można ostatecznie wyrazić jako

$$k(p) = \frac{U(p)}{u(y)} \quad (\text{S9.6})$$

W przypadku ręcznego woltomierza cyfrowego wartość składowej dominującej niepewności pomiaru pochodzącej z ograniczonej rozdzielczości wskazań wynosi  $u_{\delta V_x}(E_x) = 0,029$  V, podczas gdy całkowita wartość składowych niedominujących niepewności jest równa  $u_R(E_x) = 0,0065$  V. Iloraz tych wartości jest równy  $u_R(E_x) / u_{\delta V_x}(E_x) = 0,22$ . Rozkład wartości, które można uznać za błędy wskazań, jest zatem prostokątny. Prawdopodobieństwo rozszerzenia dla rozkładu prostokątnego jest funkcją liniową rozszerzonej niepewności pomiaru (gdzie parametr  $a$  jest szerokością połówkową rozkładu prostokątnego)

$$p = \frac{U}{a} \quad (\text{S9.7})$$

Rozwiązanie tego równania względem niepewności pomiaru rozszerzonej  $U$  i podstawienie wyniku do równania (S9.6) wraz z wyrażeniem (3.8) (część pierwsza opracowania) na standardową niepewność pomiaru dla rozkładu prostokątnego daje ostatecznie zależność

$$k(p) = p\sqrt{3} \quad (\text{S9.8})$$

A zatem, dla stosowanego w przykładach z publikacji EA prawdopodobieństwa rozszerzenia  $p = 95\%$  współczynnik rozszerzenia wynosi  $k = 1,65$ .

**S10 WZORCOWANIE SUWMIARKI Z NONIUSZEM**

**S10.1** Suwmiarkę z noniuszem, wykonaną ze stali, wzorcuje się przez porównanie z wzorcami roboczymi, którymi są stalowe płytki wzorcowe klasy dokładności 1. Zakres pomiarowy suwmiarki wynosi 150 mm. Działka elementarna suwmiarki ma wartość 0,05 mm (działka elementarna podziałki prowadnicy wynosi 1 mm, a działka elementarna podziałki noniusza – 1/20 mm). Do wzorcowania stosuje się kilka płytek wzorcowych o długościach nominalnych mieszczących się w zakresie od 0,5 mm do 150 mm. Dobiera się je w taki sposób, aby wyniki pomiarów były w przybliżeniu równomiernie rozłożone w badanym zakresie pomiarowym (np. 0 mm, 50 mm, 100 mm, 150 mm), zapewniając jednocześnie różne odczyty na podziałce noniusza (np. 0,0 mm, 0,3 mm, 0,6 mm, 0,9 mm). Podany przykład dotyczy wzorcowania w punkcie podziałki o wartości 150 mm w przypadku odczytu wymiaru zewnętrznego. Przed rozpoczęciem wzorcowania należy dokonać przeglądu stanu technicznego suwmiarki. Czynność ta obejmuje zbadanie wpływu przesunięcia osi przedmiotu mierzonego w stosunku do osi prowadnicy (błąd Abbego) na wynik pomiaru oraz sprawdzenie jakości płaszczyzn pomiarowych szczęk (ich płaskości, wzajemnej równoległości i prostokątności względem prowadnicy) i działania zacisku.

**S10.2** Błąd wskazania  $E_x$  suwmiarki w temperaturze odniesienia  $t_0 = 20^\circ\text{C}$  otrzymuje się z następującej zależności:

$$E_x = l_{ix} - l_s + L_s \cdot \bar{\alpha} \cdot \Delta t + \delta l_{ix} + \delta l_M \quad (\text{S10.1})$$

gdzie

$l_{ix}$  - wartość wskazana przez suwmiarkę,

$l_s$  - rzeczywista długość płytki wzorcowej,

$L_s$  - długość nominalna płytki wzorcowej,

$\bar{\alpha}$  - średni temperaturowy współczynnik rozszerzalności suwmiarki i płytki wzorcowej,

$\Delta t$  - różnica temperatur suwmiarki i płytki wzorcowej,

$\delta l_{ix}$  - poprawka na ograniczoną rozdzielczość suwmiarki,

$\delta l_M$  - poprawka związana z oddziaływaniami natury mechanicznej, jak nacisk pomiarowy, błąd Abbego oraz odchylenia od płaskości i równoległości płaszczyzn pomiarowych.

**S10.3 Wzorce robocze ( $l_s, L_s$ )**

Długości płytek wzorcowych stosowanych jako wzorce robocze są podane w świadectwie wzorcowania razem z przypisanymi im wartościami niepewności pomiaru rozszerzonej. Świadectwo stwierdza, że płytki wzorcowe są zgodne z wymaganiami dla płytek wzorcowych klasy dokładności 1 sformułowanymi w normie międzynarodowej ISO 3650, tzn. że ich długość środkowa jest równa długości nominalnej przy wartościach odchyień zawartych w granicach  $\pm 0,8 \mu\text{m}$ . Za rzeczywistą długość płytek wzorcowych przyjmuje się ich długość nominalną bez uwzględnienia poprawki, przyjmując granicę tolerancji wymiarowej jako górną i dolną granicę przedziału zmienności jej długości.

**S10.4 Temperatura ( $\Delta t, \bar{\alpha}$ )**

Przyjmuje się, że po odpowiednim czasie stabilizacji temperatura suwmiarki jest równa temperaturze płytki wzorcowej przy granicznych wartościach jej zmian równych  $\pm 2^\circ\text{C}$ . Średni temperaturowy współczynnik rozszerzalności wynosi  $11,5 \cdot 10^{-6} \text{C}^{-1}$ . Niepewność wartości średniego temperaturowego współczynnika rozszerzalności i wartości różnicy

między temperaturowymi współczynnikami rozszerzalności suwmiarki i płytki wzorcowej nie została wzięta pod uwagę. Uznano, że jej wpływ można w omawianym przypadku pominąć (por. także Suplement 1, przykład S4).

#### S10.5 Rozdzielczość suwmiarki ( $\delta l_x$ )

Wartość działki elementarnej noniusza wynosi 0,05 mm. Zmienność wskazań wynikającą z ograniczonej rozdzielczości oszacowano na  $\pm 25 \mu\text{m}$  przy założeniu prostokątnego rozkładu prawdopodobieństwa.

#### S10.6 Oddziaływania mechaniczne ( $\delta l_M$ )

Oddziaływania mechaniczne obejmują wpływ nacisku pomiarowego, błąd Abbego i oddziaływanie między prowadnicą a suwakiem. Dodatkowym źródłem odchylenia może być fakt, że pomiarowe powierzchnie szczęk nie są idealnie płaskie, równoległe względem siebie i prostopadłe do prowadnicy. W celu ułatwienia analizy uwzględniono tylko sumaryczny wpływ wymienionych czynników, przy czym granice przedziału zmienności oszacowano na  $\pm 50 \mu\text{m}$ .

#### S10.7 Korelacja

Żadnej z wielkości wejściowych nie uznano za znacząco skorelowaną.

#### S10.8 Pomiar ( $l_x$ )

Pomiar wykonano kilkakrotnie, nie obserwując rozrzutu otrzymanych wartości. Zatem można pominąć składową niepewności związaną z ograniczoną powtarzalnością. Wartość wyniku pomiaru płytki wzorcowej o długości nominalnej 150 mm wynosi 150,10 mm.

#### S10.9 Budżet niepewności ( $\delta l_x$ )

| symbol wielkości | estymata wielkości | niepewność standardowa | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności  |
|------------------|--------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------|
| $X_i$            | $x_i$              | $u(x_i)$               |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$            |
| $l_x$            | 150,10 mm          | –                      | –                          | –                        | –                   |
| $l_s$            | 150,00 mm          | 0,46 $\mu\text{m}$     | prostokątny                | -1,0                     | -0,46 $\mu\text{m}$ |
| $\Delta t$       | 0                  | 1,15 K                 | prostokątny                | 1,7 $\mu\text{mK}^{-1}$  | 2,0 $\mu\text{m}$   |
| $\delta l_x$     | 0                  | 14 $\mu\text{m}$       | prostokątny                | 1,0                      | 14 $\mu\text{m}$    |
| $\delta l_M$     | 0                  | 29 $\mu\text{m}$       | prostokątny                | 1,0                      | 29 $\mu\text{m}$    |
| $E_x$            | 0,10 mm            |                        |                            |                          | 32 $\mu\text{m}$    |

#### S10.10 Niepewność rozszerzona

Przeważający udział w niepewności pomiaru związanej z wynikiem mają dwie składowe: składowa związana z naciskiem pomiarowym i składowa wynikająca z ograniczonej rozdzielczości suwmiarki. Finalny rozkład nie jest rozkładem normalnym, lecz w zasadzie rozkładem trapezowym, przy czym iloraz górnej



podstawy do jego dolnej podstawy wynosi  $\beta = 0,33$ . Metoda efektywnych stopni swobody opisana w Załączniku E nie znajduje zatem w tym przypadku zastosowania. Właściwy dla rozkładu trapezowego współczynnik rozszerzenia  $k = 1,83$  obliczono z równania (S10.10) zamieszczonego w punkcie S10.13 wyjaśniającym podstawy matematyczne modelu obliczeniowego. Niepewność rozszerzona wynosi zatem

$$U = k \cdot u(E_x) = 1,83 \cdot 0,032 \text{ mm} \cong 0,06 \text{ mm}$$

### S10.11 Zapis wyniku pomiaru

Dla 150 mm błąd wskazania suwmiarki wynosi  $(0,10 \pm 0,06)$  mm.

Podaną niepewność pomiaru rozszerzoną wyrażono jako standardową niepewność pomiaru pomnożoną przez współczynnik rozszerzenia  $k = 1,83$ , którego wartość obliczono na podstawie przyjętego trapezowego rozkładu prawdopodobieństwa dla prawdopodobieństwa rozszerzenia 95 %.

### S10.12 Uwaga dodatkowa

Metoda zastosowana do obliczenia współczynnika rozszerzenia jest ściśle związana z faktem, że w niepewności pomiaru związanej z wynikiem przeważający pod względem wartości liczbowej jest udział dwóch składowych: składowej opisującej oddziaływania o charakterze mechanicznym i składowej wynikającej z ograniczonej rozdzielczości podziałki noniusza. Założenie rozkładu normalnego wielkości wyjściowej nie znajduje potwierdzenia, stosują się zatem wymagania opisane w punkcie 5.6 podstawowej części niniejszego opracowania. Uwzględniając fakt, że w praktyce wartości prawdopodobieństwa i gęstości prawdopodobieństwa można określić tylko z odchyleniem względnym zawartym w granicach od 3 % do 5 %, przyjęto, że rozkład jest trapezowy. Powstał on przez splot dwóch rozkładów prostokątnych związanych ze składowymi dominującymi. Wartości szerokości połówkowych podstawy dolnej i górnej powstałego w ten sposób trapezu równoramiennego wynoszą odpowiednio 75  $\mu\text{m}$  i 25  $\mu\text{m}$ . 95 % pola powierzchni trapezu zawiera się w przedziale  $\pm 60 \mu\text{m}$  wokół jego osi symetrii, co odpowiada współczynnikowi  $k = 1,83$ .

### S10.13 Uwagi dotyczące podstaw matematycznych

Jeżeli charakterystyka pomiaru jest taka, że dwie spośród składowych niepewności w budżecie można zidentyfikować jako dominujące, metoda przedstawiona w S9.14 może być zastosowana wtedy, jeżeli te dwie składowe dominujące, na przykład oznaczone indeksami „1” oraz „2”, są połączone w jeden człon dominujący. Niepewność standardową przypisaną wynikowi pomiaru  $y$  można w tym przypadku zapisać następująco:

$$u(y) = \sqrt{u_0^2(y) + u_R^2(y)} \quad (\text{S10.2})$$

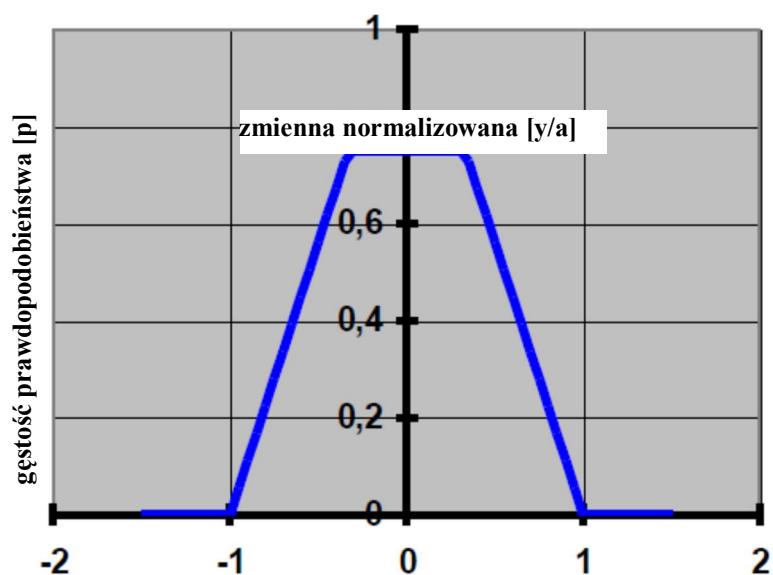
gdzie

$$u_0(y) = \sqrt{u_1^2(y) + u_2^2(y)} \quad (\text{S10.3})$$

oznacza składnik powstały przez połączenie dwóch członów dominujących, a

$$u_R(y) = \sqrt{\sum_{i=3}^N u_i^2(y)} \quad (\text{S10.4})$$

oznacza całkowity udział pozostałych składowych niedominujących niepewności. Jeżeli dwie składowe dominujące niepewności mają prostokątny rozkład prawdopodobieństwa o szerokościach połówkowych równych odpowiednio  $a_1$  i  $a_2$ , w wyniku ich splotu powstaje symetryczny rozkład trapezowy



**Rys.1.** Symetryczny trapezowy rozkład prawdopodobieństwa o wartości parametru brzegowego  $\beta = 0,33$ , powstały ze splotu dwóch rozkładów prostokątnych.

o szerokościach połówkowych:

$$a = a_1 + a_2 \quad \text{i} \quad b = |a_1 - a_2| \quad (\text{S10.5})$$

odpowiednio podstawy dolnej i górnej (patrz rys. 1). Rozkład można wyrazić w następującej postaci ogólnej:

$$\varphi(y) = \frac{1}{a(1+\beta)} \cdot \begin{cases} 1 & |y| < \beta \cdot a \\ \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{|y|}{a}\right) & \beta \cdot a \leq |y| \leq a \\ 0 & a < |y| \end{cases} \quad (\text{S10.6})$$

z parametrem  $\beta$

$$\beta = \frac{b}{a} = \frac{|a_1 - a_2|}{a_1 + a_2} \quad (\text{S10.7})$$

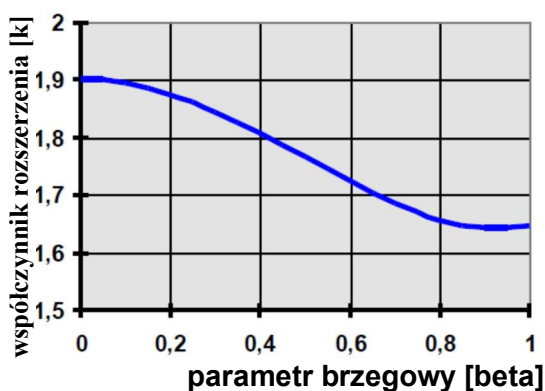
Kwadrat niepewności standardowej dla rozkładu trapezowego wyrażonego równaniem (S10.6) dany jest wyrażeniem

$$u^2(y) = \frac{a^2}{6} (1 + \beta^2) \quad (\text{S10.8})$$

Na podstawie równania rozkładu (S10.6) można przedstawić w sposób opisany w punkcie S9.14 zależność współczynnika rozszerzenia od prawdopodobieństwa rozszerzenia

$$k(p) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}}} \cdot \begin{cases} \frac{p(1+\beta)}{2} & \frac{p}{2-p} < \beta \\ 1 - \sqrt{(1-p)(1-\beta^2)} & \beta \leq \frac{p}{2-p} \end{cases} \quad (\text{S10.9})$$

Rysunek 2 przedstawia zależność wartości współczynnika rozszerzenia  $k$  w funkcji parametru brzegowego  $\beta$  dla prawdopodobieństwa rozszerzenia równego 95 %.



**Rys.2.** Zależność współczynnika rozszerzenia  $k$  od wartości parametru brzegowego  $\beta$  rozkładu trapezowego dla prawdopodobieństwa rozszerzenia 95 %

Współczynnik rozszerzenia dla prawdopodobieństwa rozszerzenia 95 %, właściwy dla rozkładu trapezowego o wartości parametru brzegowego  $\beta < 0,95$ , oblicza się z następującej zależności

$$k = \frac{1 - \sqrt{(1-p)(1-\beta^2)}}{\sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}}} \quad (\text{S10.10})$$

**S11 WZORCOWANIE KALIBRATORA TEMPERATURY W TEMPERATURZE 180°C**

**S11.1** W ramach wzorcowania mierzy się temperaturę, którą należy przypisać otworowi pomiarowemu kalibratora temperatury<sup>3</sup>. Pomiar przeprowadza się po osiągnięciu przez wbudowany wskaźnik temperatury stabilnego wskazania o wartości 180,0°C. Temperaturę panującą w otworze pomiarowym określa się za pomocą wprowadzonego doń platynowego termometru rezystancyjnego, który pełni rolę wzorca roboczego. Wzorcowanie polega na pomiarze rezystancji elektrycznej termometru za pomocą mostka prądu przemiennego. Temperatura  $t_X$ , którą należy przyjąć jako temperaturę otworu pomiarowego w momencie, kiedy wskazanie wbudowanego termometru wynosi 180,0°C, dana jest następującym równaniem:

$$t_X = t_S + \delta t_S + \delta t_D - \delta t_{IX} + \delta t_R + \delta t_A + \delta t_H + \delta t_V \quad (\text{S11.1})$$

gdzie

- $t_S$  - temperatura wskazana przez wzorzec roboczy, której wartość wywodzi się z pomiaru rezystancji przy zasilaniu prądem zmiennym,
- $\delta t_S$  - poprawka temperatury wynikająca z pomiaru rezystancji przy zasilaniu prądem zmiennym,
- $\delta t_D$  - poprawka temperatury wynikająca ze zmiany wartości wzorca roboczego od czasu jego ostatniego wzorcowania (dryf),
- $\delta t_{IX}$  - poprawka temperatury wynikająca z błędu nastawienia kalibratora temperatury,
- $\delta t_R$  - poprawka temperatury wynikająca z występujących w kierunku promieniowym różnic temperatury między termometrem wbudowanym a wzorcem roboczym,
- $\delta t_A$  - poprawka temperatury wynikająca z występującej w kierunku osiowym niejednorodności temperatury w otworze pomiarowym,
- $\delta t_H$  - poprawka temperatury wynikająca z histerezy wskazań,
- $\delta t_V$  - zmienność temperatury w czasie pomiaru.

Nie uwzględniono poprawki temperatury wynikającej z przewodzenia ciepła przez osłonę termometru, ponieważ platynowy termometr rezystancyjny stosowany jako wzorzec roboczy ma średnicę zewnętrzną  $d \leq 6$  mm. Przeprowadzone wcześniej badania wykazały, że w takim przypadku oddziaływanie przewodnictwa cieplnego osłony można pominąć.

**S11.2 Wzorzec roboczy ( $t_S$ )**

Świadectwo wzorcowania termometru rezystancyjnego zastosowanego jako wzorzec roboczy podaje zależność między rezystancją a temperaturą. Zmierzona wartość rezystancji odpowiada temperaturze równej 180,1°C, przy czym przypisana tej wartości niepewność pomiaru rozszerzona wynosi  $U = 30$  mK ( $k = 2$ ).

<sup>3</sup> **Proces ten ma podstawowe znaczenie dla wzorcowania, niezależnie od dziedziny pomiarowej, której to dotyczy, stąd też budzi ona powszechne zainteresowanie.** Przykład pokazuje, że istnieją dwa równorzędne sposoby potraktowania tego zagadnienia: bezpośrednie przypisanie wskazaniu przyrządu pewnej wartości oraz powiązanie wartości wskazania z poprawką, zwaną zazwyczaj błędem wskazania.

**S11.3 Wyznaczenie temperatury przez pomiar rezystancji ( $\delta t_s$ )**

Wartość temperatury zmierzona przez termometr rezystancyjny użyty jako wzorzec roboczy wynosi 180,1 °C. Standardowa niepewność pomiaru związana z pomiarem rezystancji i przeliczona na wartość temperatury wynosi  $u(\delta t_s) = 10$  mK.

**S11.4 Dryf wskazania wzorca roboczego ( $\delta t_D$ )**

Na podstawie znajomości właściwości platynowych termometrów rezystancyjnych tego samego typu co wzorzec roboczy, zmianę wskazań będącą skutkiem starzenia rezystora, które nastąpiło od czasu ostatniego wzorcowania termometru, oszacowano na  $\pm 40$  mK.

**S11.5 Błąd nastawienia kalibratora temperatury ( $\delta t_x$ )**

Działka elementarna wbudowanego termometru kontrolnego kalibratora temperatury wynosi 0,1 K. Wyznacza ona granice rozdzielczości temperatury  $\pm 50$  mK, wewnątrz których zawiera się wskazanie określające jednoznacznie stan termodynamiczny bloku temperaturowego.

Uwaga: Jeśli wskazania wbudowanego termometru nie są podane w jednostkach temperatury, granice rozdzielczości wskazania należy przeliczyć na równoważne wartości temperatury drogą pomnożenia wartości wskazania przez odpowiednią stałą przyrządu.

**S11.6 Niejednorodność pola temperaturowego w kierunku promieniowym ( $\delta t_R$ )**

Występującą w kierunku promieniowym różnicę temperatury między otworem pomiarowym a wbudowanym termometrem oszacowano jako znajdująca się w przedziale  $\pm 100$  mK.

**S11.7 Niejednorodność pola temperaturowego w kierunku osiowym ( $\delta t_A$ )**

Odchylenia temperatury będące skutkiem osiowej niejednorodności pola temperaturowego w otworze pomiarowym oszacowano na podstawie wskazań otrzymanych przy różnych głębokościach zanurzenia termometru, jako wartości leżące w przedziale  $\pm 250$  mK.

**S11.8 Efekt histerezy ( $\delta t_H$ )**

Odchylenie temperatury otworu pomiarowego będące skutkiem zjawiska histerezy określono na podstawie wskazań termometru odniesienia podczas cykliów pomiarowych wykonanych zarówno przy temperaturze rosnącej, jak i malejącej. Wartości graniczne tego odchylenia oszacowano na  $\pm 50$  mK.

**S11.9 Niestabilność temperatury ( $\delta t_V$ )**

Zmiany temperatury wywołane jej niestabilnością podczas 30 minutowego cyklu pomiarowego zostały oszacowane i mieszczą się w przedziale  $\pm 30$  mK.

**S11.10 Korelacja**

Żadnej z wielkości wejściowych nie uznano za znacząco skorelowaną.

**S11.11 Powtórzone obserwacje**

W związku z ograniczoną rozdzielczością wskazania wbudowanego termometru nie zaobserwowano rozrzutu wartości wskazań otrzymanych drogą wielokrotnych powtórzeń.

**S11.12 Budżet niepewności ( $t_x$ )**

| symbol wielkości<br>$X_i$ | estymata wielkości<br>$x_i$ | niepewność standardowa<br>$u(x_i)$ | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości<br>$c_i$ | udział niepewności<br>$u_i(y)$ |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| $t_s$                     | 180,1 °C                    | 15 mK                              | normalny                   | 1,0                               | 15 mK                          |
| $\delta t_s$              | 0,0 °C                      | 10 mK                              | normalny                   | 1,0                               | 10 mK                          |
| $\delta t_D$              | 0,0 °C                      | 23 mK                              | prostokątny                | 1,0                               | 23 mK                          |
| $\delta t_x$              | 0,0 °C                      | 29 mK                              | prostokątny                | -1,0                              | -29 mK                         |
| $\delta t_R$              | 0,0 °C                      | 58 mK                              | prostokątny                | 1,0                               | 58 mK                          |
| $\delta t_A$              | 0,0 °C                      | 144 mK                             | prostokątny                | 1,0                               | 144 mK                         |
| $\delta t_H$              | 0,0 °C                      | 29 mK                              | prostokątny                | 1,0                               | 29 mK                          |
| $\delta t_v$              | 0,0 °C                      | 17 mK                              | prostokątny                | 1,0                               | 17 mK                          |
| $t_x$                     | 180,1 °C                    |                                    |                            |                                   | 164 mK                         |

**S11.13 Niepewność rozszerzona**

Przeważającymi pod względem wartości składowymi standardowej niepewności pomiaru związanej z wynikiem są poprawki mierzonej temperatury związane odpowiednio z osiową niejednorodnością pola temperatury w otworze pomiarowym oraz występującą w kierunku promieniowym różnicą temperatury między wbudowanym termometrem a wzorcem roboczym. Finalny rozkład nie jest rozkładem normalnym, lecz w zasadzie trapezowym. Zgodnie z punktem S10.13 współczynnik rozszerzenia odpowiadający wartości parametru brzegowego  $\beta = 0,43$  wynosi  $k = 1,81$ .

$$U = k \cdot u(t_x) = 1,81 \cdot 164 \text{ mK} \cong 0,3 \text{ K}$$

**S11.14 Zapis wyniku pomiaru**

Temperatura otworu pomiarowego, którą należy przypisać wartości wskazania wbudowanego termometru kontrolnego kalibratora równej 180°C, wynosi **(180,1±0,3) °C**.

Podaną rozszerzoną niepewność pomiaru wyrażono jako standardową niepewność pomiaru pomnożoną przez współczynnik rozszerzenia  $k = 1,81$ , którego wartość obliczono na podstawie założonego trapezowego rozkładu prawdopodobieństwa dla prawdopodobieństwa rozszerzenia 95 %.

**S11.15 Uwagi dotyczące matematycznych podstaw zastosowanego modelu pomiaru**

Niektórzy metrologowie są zakłopotani faktem, że wskazanie wbudowanego termometru kontrolnego nie pojawia się *explicite* w równaniu (S11.1) będącym zapisem funkcji pomiaru. Zaspakajając ich potrzeby, można omówiony problem sformułować inaczej, posługując się pojęciem błędu wskazania

$$E_x = t_x - t_i \quad (\text{S11.2})$$

wbudowanego wskaźnika temperatury

$$E_X = t_S - t_i + \delta t_S + \delta t_D - \delta t_{IX} + \delta t_R + \delta t_A + \delta t_H + \delta t_V \quad (\text{S11.3})$$

Wartość wskazana  $t_i$  jest wartością nominalną. Jej rola polega na przesunięciu wartości mierzandru wzdłuż podziałki przyrządu pomiarowego. Nie ma ona jednak udziału w niepewności pomiaru związanej z błędem wskazania

$$u(E_X) = u(t_X) \quad (\text{S11.4})$$

Funkcję pomiaru opisaną równaniem (S11.1) można wyprowadzić z równania (S11.3), korzystając z definicji błędu wskazania wyrażonej równaniem (S11.2).

Uwagi zamieszczone w powyższym punkcie pokazują, że niekoniecznie musi istnieć tylko jedna droga wyboru modelu **oceny** niepewności pomiaru. Metrolog ma swobodę wyboru sposobu zgodnego ze swoimi przyzwyczajeniami i swoim podejściem do rozwiązywanego zagadnienia. Funkcje pomiaru, które można matematycznie przekształcić jedna w drugą, opisują ten sam proces pomiarowy. W przypadkach, w których występuje ciągłość wartości wskazań – tak jak ma to miejsce przy wzorcowaniu rozpatrywanego kalibratora temperatury – funkcje pomiaru podlegające wzajemnym przekształceniom liniowym mogą służyć jako równorzędne środki wyrażenia problemu pomiarowego.

## S12 WZORCOWANIE WODOMIERZA PRZEZNACZONEGO DO UŻYTKU W GOSPODARSTWIE DOMOWYM

**S12.1** Wzorcowanie wodomierza polega na określeniu względnego błędu wskazania miernika w odpowiednim zakresie przepływu strumienia. Pomiar wykonuje się przy zastosowaniu urządzenia dostarczającego wodę o odpowiednim strumieniu przepływu i ciśnieniu wynoszącym około 500 kPa, która to wartość jest typowa dla wodociągów miejskich. Wodę zbiera się w otwartym zbiorniku pomiarowym, który został uprzednio wywzorcowany i służy do wyznaczenia wartości odniesienia objętości wody. Na początku pomiaru zbiornik pomiarowy jest pusty, lecz nawilżony. Zbiornik pomiarowy jest wyposażony w wodowskaz rurkowy z podziałką, który pozwala na odczyt poziomu wody. Wzorcowany wodomierz instaluje się między układem zasilania stanowiska wodą a zbiornikiem pomiarowym. Wodomierz jest wyposażony w mechaniczny licznik ze wskazówkami. Pomiar przeprowadza się przy wartości natężenia przepływu równej 2500 l/h metodą z "zatrzymanym startem i stopem", co oznacza, że zarówno na początku, jak i na końcu pomiaru wartość strumienia objętości wynosi zero. Wartość wskazania wodomierza rejestruje się na początku pomiaru i po jego zakończeniu. Poziom wypełnienia zbiornika pomiarowego odczytuje po zakończeniu pomiaru. Odczytuje się również wartości temperatury i ciśnienia wody w wodomierzu oraz temperatury wody w zbiorniku pomiarowym.

**S12.2** Błąd względny  $e_x$  wskazania otrzymanego w wyniku pojedynczego pomiaru definiuje się następująco:

$$e_x = \frac{\Delta V_{ix} + \delta V_{ix2} - \delta V_{ix1}}{V_x} - 1 \quad (S12.1)$$

przy czym

$$V_x = (V_{is} + \delta V_{is})(1 + \alpha_s(t_s - t_0))(1 + \alpha_w(t_x - t_s))(1 - \kappa_w(p_x - p_s)) \quad (S12.2)$$

gdzie

- $\Delta V_{ix} = V_{ix2} - V_{ix1}$  - różnica wskazań wodomierza,
- $V_{ix1}, V_{ix2}$  - wskazanie wodomierza odpowiednio na początku pomiaru i po jego zakończeniu,
- $\delta V_{ix1}, \delta V_{ix2}$  - poprawki spowodowane ograniczoną rozdzielczością wskazań wodomierza,
- $V_x$  - objętość, która przepłynęła przez wodomierz w czasie pomiaru w określonych warunkach na wejściu wodomierza, tj. pod ciśnieniem  $p_x$  i w temperaturze  $t_x$ ,
- $V_{is}$  - objętość odczytana na podziałce wodowskazu zbiornika pomiarowego po zakończeniu pomiaru,
- $\delta V_{is}$  - poprawka objętości odczytanej na podziałce wodowskazu zbiornika pomiarowego, wynikająca z ograniczonej rozdzielczości tej podziałki,
- $\alpha_s$  - temperaturowy współczynnik rozszerzalności objętościowej materiału, z którego jest zbudowany zbiornik pomiarowy,
- $t_s$  - temperatura zbiornika pomiarowego,
- $t_0$  - temperatura odniesienia, w której został wywzorcowany zbiornik pomiarowy,
- $\alpha_w$  - temperaturowy współczynnik rozszerzalności objętościowej wody,



- $t_x$  - temperatura wody na wejściu do wodomierza,
- $\kappa_w$  - współczynnik ściśliwości wody,
- $p_s$  - ciśnienie w zbiorniku pomiarowym (wynosi ono zero, skoro operuje się pojęciem nadciśnienia),
- $p_x$  - ciśnienie wody na wejściu wodomierza.

### S12.3 Zbiornik pomiarowy ( $V_{is}$ , $t_0$ )

Świadectwo wzorcowania stwierdza, że podziałka wodowskazu wskazuje objętość 200 l w temperaturze odniesienia  $t_0 = 20$  °C z rozszerzoną względną niepewnością pomiaru równą 0,1 % ( $k = 2$ ). Rozszerzona niepewność pomiaru przypisana wartości 200 l wynosi zatem 0,2 l ( $k = 2$ ).

### S12.4 Rozdzielczość podziałki zbiornika pomiarowego ( $\delta V_{is}$ )

Poziom wody w zbiorniku pomiarowym można określić z odchyleniem zawartym w granicach  $\pm 1$  mm. Uwzględniając fakt, że różnicy objętości wody w zbiorniku pomiarowym wynoszącej 0,02 l odpowiada różnica wskazań równa 1 mm, maksymalne odchylenie wartości objętości wody w tym zbiorniku od wartości wskazanej oszacowano na  $\pm 0,02$  l.

### S12.5 Temperatura wody i zbiornika pomiarowego ( $\alpha_s$ , $t_s$ )

Zmierzono temperaturę wody w zbiorniku pomiarowym otrzymując 15 °C, przy czym wartości graniczne odchylenia przypisanego temu wskazaniu oszacowano na  $\pm 2$  K. Podany zakres uwzględnia wszelkie możliwe źródła niepewności, jak wzorcowanie czujników temperatury, rozdzielczość odczytu i gradienty temperatury w zbiorniku. Wartość temperaturowego współczynnika rozszerzalności objętościowej materiału, z którego jest zbudowany zbiornik pomiarowy (stal), wynoszącą  $\alpha_s = 51 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , wzięto z poradnika materiałoznawstwa. Wartość tę przyjęto za stałą w rozpatrywanym przedziale temperatury. Ponieważ brak informacji dotyczących niepewności, z jaką określono tę wartość, założono, że jest ona znana z dokładnością do jednostki na ostatnim miejscu znaczącym. Przyjęto, że nieznanne odchylenia mieszczą się w granicach błędu zaokrąglenia  $\pm 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

### S12.6 Temperatura wody w wodomierzu ( $\alpha_w$ , $t_x$ )

Zmierzono temperaturę wody na wejściu do wodomierza otrzymując 16 °C, przy czym wartości graniczne odchylenia przypisanego temu wskazaniu oszacowano na  $\pm 2$  K. Podane granice uwzględniają wszelkie możliwe źródła niepewności, jak wzorcowanie czujników temperatury, rozdzielczość odczytu i małe zmiany temperatury w czasie pojedynczego pomiaru. Wartość temperaturowego współczynnika rozszerzalności objętościowej wody, wynoszącą  $\alpha_w = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ , wzięto z poradnika materiałoznawstwa. Wartość tę przyjęto za stałą w rozpatrywanym przedziale temperatury. Ponieważ brak informacji dotyczących niepewności, z jaką określono tę wartość, założono, że jest ona znana z dokładnością do jednostki na ostatnim miejscu znaczącym. Przyjęto, że nieznanne odchylenia mieszczą się w granicach błędu zaokrąglenia  $\pm 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

### S12.7 Różnica ciśnienia wody między wodomierzem a zbiornikiem pomiarowym ( $\kappa_w$ , $p_s$ , $p_x$ )

Nadciśnienie wody dostarczanej do otworu wlotowego wodomierza wynosi 500 kPa, przy czym względne odchylenia tej wartości nie przekraczają  $\pm 10$  %. Na drodze od otworu wlotowego wodomierza do zbiornika pomiarowego woda rozpręża się do nadciśnienia zerowego (ciśnienie atmosferyczne). Wartość współczynnika ściśliwości wody, wynosząca  $\kappa_w = 0,46 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$ , wzięto z poradnika materiałoznawstwa. Wartość

tę przyjęto za stałą w rozpatrywanym przedziale temperatury. Ponieważ brak informacji na temat niepewności, z jaką określono tę wartość, założono, że jest ona znana z dokładnością do jednostki na ostatnim miejscu znaczącym. Przyjęto, że nieznanne odchylenia mieszczą się w granicach błędu zaokrąglenia  $\pm 0,005 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$ .

### S12.8 Korelacja

Żadnej z wielkości wejściowych nie uznano za znacząco skorelowaną.

### S12.9 Budżet niepewności ( $V_X$ )

| symbol wielkości | estymata wielkości                    | niepewność standardowa               | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości                             | udział niepewności              |
|------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|----------------------------|--|---------------------------------|
| $X_i$            | $x_i$                                 | $u(x_i)$                             |                            | $c_i$  | $u_i(y)$                        |
| $V_{is}$         | 200,00 l                              | 0,10 l                               | normalny                   | 1,0  | 0,10 l                          |
| $\delta V_{is}$  | 0,0 l                                 | 0,0115 l                             | prostokątny                | 1,0  | 0,0115 l                        |
| $\alpha_s$       | $51 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$     | $0,29 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  | prostokątny                | $-1\ 000 \text{ l} \cdot \text{K}$                   | $-0,29 \cdot 10^{-3} \text{ l}$ |
| $t_s$            | 15 °C                                 | 1,15 K                               | prostokątny                | $-0,0198 \text{ l} \cdot \text{K}^{-1}$              | $-0,0228 \text{ l}$             |
| $\alpha_w$       | $0,15 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   | $2,9 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$   | prostokątny                | $200 \text{ l} \cdot \text{K}$                       | $0,58 \cdot 10^{-3} \text{ l}$  |
| $t_x$            | 16 °C                                 | 1,15 K                               | prostokątny                | $-0,0300 \text{ l} \cdot \text{K}^{-1}$              | $-0,0346 \text{ l}$             |
| $\kappa_w$       | $0,46 \cdot 10^{-6} \text{ kPa}^{-1}$ | $2,9 \cdot 10^{-9} \text{ kPa}^{-1}$ | prostokątny                | $-1,00 \cdot 10^5 \text{ l} \cdot \text{kPa}$        | $-0,29 \cdot 10^{-3} \text{ l}$ |
| $\rho_x$         | 500 kPa                               | 29 kPa                               | prostokątny                | $-9,2 \cdot 10^{-5} \text{ l} \cdot \text{kPa}^{-1}$ | $-0,0027 \text{ l}$             |
| $\rho_s$         | 0,0 Pa                                | –                                    | –                          | –  | –                               |
| $V_X$            | 199,93 l                              |                                      |                            |  | 0,109 l                         |

Jest oczywiste, że wartość liczbowa standardowej niepewności pomiaru związanej z wynikiem wzorcowania jest zdominowana przez wskazanie objętości odczytane na podziałce wodomierza zbiornika pomiarowego. Rozkład prawdopodobieństwa wielkości mierzonej nie jest rozkładem normalnym, lecz prostokątnym. Należy o tym pamiętać podczas dalszych kroków procedury oceny niepewności.

### S12.10 Wskazanie wodomierza ( $\Delta V_{ix}$ , $\delta V_{ix1}$ , $\delta V_{ix2}$ )

Wzorcowany wodomierz ma rozdzielczość równą 0,2 l. Z wartości tej wynikają maksymalne odchylenia związane z rozdzielczością wodomierza wynoszące dla obu wskazań  $\pm 0,1 \text{ l}$ .

**S12.11 Budżet niepewności ( $e_x$ )**

| symbol wielkości<br>$X_i$ | estymata wielkości<br>$x_i$ | niepewność standardowa<br>$u(x_i)$ | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości<br>$c_i$ | udział niepewności<br>$u_i(y)$ |
|---------------------------|-----------------------------|------------------------------------|----------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|
| $\Delta V_{ix}$           | 200,0 l                     | –                                  | normalny                   | –                                 | –                              |
| $\delta V_{ix1}$          | 0,0 l                       | 0,058 l                            | prostokątny                | $-5,0 \cdot 10^{-3}$              | $-0,29 \cdot 10^{-3}$ l        |
| $\delta V_{ix2}$          | 0,0 l                       | 0,058 l                            | prostokątny                | $5,0 \cdot 10^{-3}$               | $0,29 \cdot 10^{-3}$ l         |
| $V_x$                     | 199,93 l                    | 0,109 l                            | normalny                   | $-5,0 \cdot 10^{-3}$              | $-0,55 \cdot 10^{-3}$ l        |
| $e_x$                     | 0,000 3                     |                                    |                            |                                   | $0,68 \cdot 10^{-3}$           |

**S12.12 Powtarzalność wodomierza**

Porównanie wartości względnego błędu wskazań wzorcowanego wodomierza, otrzymanych dla dwóch pomiarów wykonanych przy takim samym strumieniu objętości równym 2500 l/h, wskazuje na znaczny rozrzut wyników pomiaru. Z tego powodu względny błąd wskazań wyznaczono trzykrotnie. Wyniki trzech pomiarów traktuje się jako niezależne obserwacje  $e_{xj}$  w modelu służącym do określenia średniego błędu wskazania  $e_{xav}$

$$e_{xav} = e_x + I/e_x \quad \text{gdzie} \quad e_{xav} = e_x + I/e_x \quad (\text{S12.3})$$

$$\frac{I}{e_x} = e_{xav} - e_x I/e_x = e_{xav} - e_x$$

gdzie:

$e_x$  - błąd względny wskazania dla pojedynczego wyniku pomiaru,

$\delta e_x$  - poprawka błędu względnego wskazania wynikająca z braku powtarzalności wodomierza, obliczona na podstawie wyników kilku pomiarów.

**S12.13 Wyniki pomiarów ( $e_x$ )**

| Nr pomiaru | Obliczony błąd względny wskazania | Błąd względny związany z brakiem powtarzalności |
|------------|-----------------------------------|---|
| 1          | 0,000 3                           | 0,0007  |
| 2          | 0,000 5                           | 0,0005  |
| 3          | 0,002 2                           | 0,0012  |

średni błąd wskazania  $e_{xav}$  jest średnią arytmetyczną trzech wyników:

$$e_{xav} = 0,001$$

średni błąd związany z brakiem powtarzalności:

$$\delta e_x = 0$$

odchylenie standardowe  
eksperymentalne:

$$s(1/e_x) = 0,001$$

niepewność standardowa:

$$u(\delta_{e_x}) = s(\bar{\delta}_{e_x}) = \frac{s(\bar{\delta}_{e_x})}{\sqrt{3}} = 0,00060$$

$$u(\delta_{e_x}) = s(\bar{\delta}_{e_x}) = \frac{s(\bar{\delta}_{e_x})}{\sqrt{3}} = 0,00060$$

### S12.14 Budżet niepewności ( $e_{x_{av}}$ )

| symbol wielkości | estymata wielkości | niepewność standardowa | stopnie swobody | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności   |
|------------------|--------------------|------------------------|-----------------|----------------------------|--------------------------|----------------------|
| $X_i$            | $x_i$              | $u(x_i)$               | $\nu_{eff}$     |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$             |
| $\delta e_x$     | 0,001              | $0,60 \cdot 10^{-3}$   | 2               | normalny                   | 1,0                      | $0,60 \cdot 10^{-3}$ |
| $e_x$            | 0,0                | $0,68 \cdot 10^{-3}$   | $\infty$        | normalny                   | 1,0                      | $0,68 \cdot 10^{-3}$ |
| $e_{x_{av}}$     | 0,001              |                        | 10              |                            |                          | $0,91 \cdot 10^{-3}$ |

### S12.15 Niepewność rozszerzona

Z powodu małej liczby efektywnych stopni swobody niepewności standardowej związanej ze średnim względnym błędem wskazania, standardowy współczynnik rozszerzenia powinien być zmodyfikowany według Tabeli E.1

$$U = k \cdot u(e_{x_{av}}) = 2,28 \cdot 0,91 \cdot 10^{-3} \cong 2 \cdot 10^{-3}$$

### S12.16 Zapis wyniku pomiaru

Średni błąd względny wskazania wodomierza określony przy strumieniu objętości 2500 l/h wynosi  $0,001 \pm 0,002$ .

Podaną rozszerzoną niepewność pomiaru wyrażono jako standardową niepewność pomiaru pomnożoną przez współczynnik rozszerzenia  $k = 2,28$ , która to wartość odpowiada prawdopodobieństwu rozszerzenia ok. 95 % w przypadku rozkładu t-Studenta przy liczbie efektywnych stopni swobody  $\nu_{eff} = 10$ .

### S13 WZORCOWANIE PIERŚCIENIA WZORCOWEGO O ŚREDNICY NOMINALNEJ 90 mm

**S13.1** Stalowy pierścień wzorcowy o wewnętrznej średnicy nominalnej  $D_X = 90$  mm poddano wzorcowaniu zgodnie z procedurą opisaną w przewodniku EURAMET cg-6 Version 2.0 (03/2011) (wcześniej EAL-G29:1997). Zastosowano komparator Abbego i stalowy pierścień wzorcowy o wewnętrznej średnicy nominalnej ( $D_S = 40$  mm) różniącej się znacznie od średnicy pierścienia wzorcowanego. Zarówno długościomierz, jak i stalowy pierścień wzorcowy pełnią w tym przypadku rolę wzorców roboczych. Oba pierścienie mocuje się kolejno na „pływającym” stoliku pomiarowym, który umożliwia ustawienie badanych elementów w osi pomiarowej. Dwie końcówki pomiarowe umieszczone są na ramionach w kształcie litery C. Jedno z nich umocowane na trzpieniu nieruchomym, a drugie na trzpieniu pomiarowym, doprowadza się do zetknięcia z wymienionymi pierścieniami w kilku punktach, z których każda para stanowi punkty skrajne położone na średnicy wewnętrznej pierścienia odniesienia lub pierścienia wzorcowanego. Kończówki pomiarowe mają kształt kulisty. Nacisk pomiarowy powstaje dzięki obciążnikowi, który zapewnia siłę o stałej wartości nominalnej 1,5 N w całym zakresie pomiarowym. Trzpień pomiarowy jest sztywno połączony z głowicą pomiarową wyposażoną w stalowy wzorzec kreskowy z podziałką o rozdzielczości 0,1  $\mu$ m. Wzorzec kreskowy komparatora jest okresowo sprawdzany w celu zapewnienia, że jest on zgodny z deklaracjami wytwórcy dotyczącymi maksymalnego błędu dopuszczalnego.

Dla zapewnienia warunków odniesienia wymaganych przez procedurę wzorcowania kontroluje się temperaturę pomieszczenia. Temperaturę w przestrzeni roboczej komparatora utrzymuje się na poziomie 20 °C z dopuszczalnym odchyleniem granicznym równym  $\pm 0,5$  K. Dokłada się wszelkich starań dla zapewnienia stałości wymaganej wartości temperatury pierścienia i wzorca kreskowego podczas wzorcowania.

**S13.2** Średnicę  $d_X$  wzorcowanego pierścienia w temperaturze odniesienia  $t_0 = 20$  °C otrzymuje się z następującej zależności:

$$d_X = d_S + \Delta l + \delta l_i + \delta l_T + \delta l_P + \delta l_E + \delta l_A \quad (\text{S13.1})$$

gdzie

- $d_S$  - średnica pierścienia odniesienia w temperaturze odniesienia,
- $\Delta l$  - zmierzona różnica przemieszczenia trzpienia pomiarowego w przypadku, gdy końcówki pomiarowe dotykają dwóch skrajnych punktów położonych na średnicy wewnętrznej odpowiednio pierścienia odniesienia i pierścienia wzorcowanego,
- $\delta l_i$  - poprawka na błędy wskazania komparatora,
- $\delta l_T$  - poprawka związana z wpływem temperatury na pierścień wzorcowany, pierścień odniesienia i wzorzec kreskowy komparatora,
- $\delta l_P$  - poprawka związana z niesymetrycznym położeniem końcówek pomiarowych względem osi pomiarowej,
- $\delta l_E$  - poprawka związana z różnicą w odkształceniach sprężystych pierścienia wzorcowanego i pierścienia odniesienia,
- $\delta l_A$  - poprawka związana z różną wartością błędu Abbego komparatora w przypadku pomiarów odpowiednio średnicy pierścienia wzorcowanego i średnicy pierścienia odniesienia.

**S13.3 Wzorzec roboczy ( $d_S$ )**

Wartość wewnętrznej średnicy pierścienia stosowanego jako wzorzec roboczy wraz z przypisaną jej niepewnością pomiaru rozszerzoną jest podana w świadectwie wzorcowania i wynosi  $40,0007 \text{ mm} \pm 0,2 \text{ } \mu\text{m}$  ( $k = 2$ ).

**S13.4 Komparator ( $\delta l_i$ )**

Poprawki na błędy wskazania podziałki wzorca kreskowego zostały określone przez wytwórcę i wprowadzone do pamięci elektronicznej. Błędy dopuszczalne wskazań mieszczą się w podanym przez wytwórcę zakresie równym  $\pm(0,3 \text{ } \mu\text{m} + 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot l_i)$ , gdzie  $l_i$  oznacza wartość liczbową długości zmierzonej. Informacje wytwórcy potwierdza się przez okresowe sprawdzanie wskazań komparatora. Dla różnicy dwóch wartości długości wynoszącej  $D_X - D_S = 50 \text{ mm}$  graniczne wartości nieznanego błędu wskazania szacuje się na  $\pm 0,375 \text{ } \mu\text{m}$ .

**S13.5 Poprawki temperaturowe ( $\delta l_T$ )**

Dokłada się starań, aby w czasie pomiaru pierścieni wzorcowany, pierścień odniesienia i wzorzec kreskowy komparatora zachowały stałą temperaturę. Na podstawie wykonanych wcześniej pomiarów i ogólnej znajomości układu pomiarowego można stwierdzić, że odchylenia temperatury obu pierścieni i wzorca kreskowego od temperatury otoczenia mieszczą się w granicach  $\pm 0,2 \text{ K}$ . Szacuje się jednak, że odchylenie graniczne wartości temperatury panującej w pomieszczeniu pomiarowym wynosi  $\pm 0,5 \text{ K}$ . Wiedzę o pomiarze najlepiej oddaje zatem odchylenie temperatury otoczenia od temperatury odniesienia oraz odchylenie temperatury obu pierścieni i wzorca kreskowego od temperatury otoczenia. Wartość  $\delta l_T$  poprawki wynikającej z oddziaływania odchyleń temperatury oblicza się z następującej funkcji modelowej:

$$\begin{aligned} \delta l_T = & (D_S \cdot (\alpha_S - \alpha_R) - D_X \cdot (\alpha_X - \alpha_R)) \cdot \Delta t_A \\ & + D_S \cdot \alpha_S \cdot \delta t_S - D_X \cdot \alpha_X \cdot \delta t_X - (D_S - D_X) \cdot \alpha_R \cdot \delta t_R \end{aligned} \quad (\text{S13.2})$$

gdzie:

- $D_X, D_S$  - nominalne średnice odpowiednio pierścienia wzorcowanego i pierścienia odniesienia,
- $\alpha_X, \alpha_S, \alpha_R$  - temperaturowe współczynniki rozszerzalności liniowej odpowiednio pierścienia wzorcowanego, pierścienia odniesienia i wzorca kreskowego komparatora,
- $\Delta t_A = t_A - t_0$  - odchylenie temperatury pomieszczenia pomiarowego od temperatury odniesienia  $t_0 = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,
- $\delta t_X, \delta t_S, \delta t_R$  - odchylenia temperatury odpowiednio pierścienia wzorcowanego, pierścienia odniesienia i wzorca kreskowego komparatora od temperatury otoczenia.

Ponieważ zakłada się, że wartości czterech różnic temperatury występujących w równaniu (S13.2) są równe zeru, stosowany zazwyczaj model liniowy nie uwzględniłby składowych niepewności pomiaru związanych z wartościami trzech temperaturowych współczynników rozszerzalności liniowej. Jak wyjaśniono w punkcie S4.13, w celu określenia niepewności standardowej związanej z następującymi czterema wyrazami równania (S13.2), z których każdy jest iloczynem:

$$\begin{aligned} \delta l_{TA} &= (D_S \cdot (\alpha_S - \alpha_R) - D_X \cdot (\alpha_X - \alpha_R)) \cdot \Delta t_A \\ \delta l_{TS} &= D_S \cdot \alpha_S \cdot \delta t_S \\ \delta l_{TX} &= D_X \cdot \alpha_X \cdot \delta t_X \end{aligned}$$

$$\delta l_{TR} = (D_S - D_X) \cdot \alpha_R \cdot \delta t_R \quad (S13.3)$$

należy zastosować model nieliniowy.

W oparciu o świadectwo wzorcowania pierścienia odniesienia oraz informacje wytwórcy dotyczące pierścienia wzorcowanego i wzorca kreskowego komparatora przyjęto, że wartości temperaturowych współczynników rozszerzalności liniowej mieszczą się w przedziale  $(11,5 \pm 1,0) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ . Biorąc tą wartość oraz podane na początku granice zmienności temperatury, niepewności standardowe związane z czterema iloczynami są następujące:  $u(\delta l_{TA}) = 0,018 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $u(\delta l_{TS}) = 0,053 \text{ } \mu\text{m}$ ,  $u(\delta l_{TX}) = 0,12 \text{ } \mu\text{m}$  i  $u(\delta l_{TR}) = 0,066 \text{ } \mu\text{m}$ . Niepewność standardowa związana z połączonymi poprawkami temperaturowymi jest wyprowadzona z tych wartości z zastosowaniem następującego pod-budżetu niepewności:

| symbol wielkości | estymata wielkości | niepewność standardowa | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności  |
|------------------|--------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|---------------------|
| $X_i$            | $x_i$              | $u(x_i)$               |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$            |
| $\delta l_{TA}$  | 0,0 $\mu\text{m}$  | 0,018 $\mu\text{m}$    | –                          | 1,0                      | 0,018 $\mu\text{m}$ |
| $\delta l_{TS}$  | 0,0 $\mu\text{m}$  | 0,053 $\mu\text{m}$    | –                          | 1,0                      | 0,053 $\mu\text{m}$ |
| $\delta l_{TX}$  | 0,0 $\mu\text{m}$  | 0,12 $\mu\text{m}$     | –                          | 1,0                      | 0,12 $\mu\text{m}$  |
| $\delta l_{TR}$  | 0,0 $\mu\text{m}$  | 0,066 $\mu\text{m}$    | –                          | 1,0                      | 0,066 $\mu\text{m}$ |
| $\delta l_T$     | 0,0 $\mu\text{m}$  |                        |                            |                          | 0,15 $\mu\text{m}$  |

### S13.6 Poprawka na niewspółosiowość ( $\delta l_p$ )

Przyjmuje się, że odchylenie położenia osi symetrii dwóch kulistych końcówek pomiarowych od osi pomiarowej mieści się w zakresie  $\pm 20 \text{ } \mu\text{m}$ . Stosując równania podane w uwagach dotyczących podstaw matematycznych (S13.13), otrzymuje się następujące wyrażenia odpowiednio na poprawkę wynikającą z hipotetycznej niewspółosiowości oraz na przypisaną do niej standardową niepewność pomiaru:

$$\delta l_p = 2 \cdot \left( \frac{1}{D_X} - \frac{1}{D_S} \right) \cdot u^2(\delta c) \quad (S13.4)$$

$$u^2(\delta l_p) = \frac{16}{5} \cdot \left( \frac{1}{D_X^2} + \frac{1}{D_S^2} \right) \cdot u^4(\delta c) \quad (S13.5)$$

W powyższych równaniach  $\delta c$  reprezentuje małą odległość mierzonego odcinka od środka pierścienia. Obliczone w ten sposób wartości poprawki i związanej z nią standardowej niepewności pomiaru wynoszą odpowiednio  $\delta l_p \cong -0,004 \text{ } \mu\text{m}$  i  $u(\delta l_p) \cong 0,0065 \text{ } \mu\text{m}$ . Jak wynika z zestawienia składowych niepewności (punkt S13.10), wartości te są dwa rzędy wielkości mniejsze niż pozostałe składowe niepewności, a zatem ich udziału można w opisywanych warunkach pomiaru nie uwzględniać.

**S13.7 Poprawka na odkształcenie sprężyste ( $\delta/\epsilon$ )**

Podczas opisywanego pomiaru nie określano odkształcenia sprężystego pierścienia wzorcowanego ani pierścienia odniesienia. Na podstawie zebranych uprzednio danych założono jednak, że odchylenia będące skutkiem odkształceń sprężystych mieszczą się w zakresie  $\pm 0,03 \mu\text{m}$ .

**S13.8 Poprawka na błąd Abbego ( $\delta/\lambda$ )**

Podczas opisywanego pomiaru nie określono wartości błędu Abbego cechującej użyty długościomierz. Na podstawie znajomości charakterystyki długościomierza i danych pochodzących z operacji jego okresowego sprawdzania, odchylenia wynikające z błędu Abbego oszacowano na zawarte w granicach  $\pm 0,02 \mu\text{m}$ .

**S13.9 Wyniki pomiarów ( $\Delta l$ )**

Otrzymano następujące wyniki pomiarów średnicy wewnętrznej pierścienia wzorcowanego i pierścienia odniesienia:

| Nr | Przedmiot pomiaru     | Wynik pomiaru                     | Mezurand   |
|----|-----------------------|-----------------------------------|--|
| 1  | pierścień odniesienia | 0<br>zerowanie<br>długościomierza | średnica w płaszczyźnie symetrii prostopadłej do osi pierścienia, w kierunku oznaczonym wskazami   |
| 2  | pierścień wzorcowany  | 49,999 35 mm                      | średnica w płaszczyźnie symetrii prostopadłej do osi pierścienia, w kierunku oznaczonym wskazami   |
| 3  | pierścień wzorcowany  | 49,999 11 mm                      | średnica w płaszczyźnie symetrii prostopadłej do osi pierścienia, obrócona wokół tej osi względem kierunku oznaczonego wskazami o +1 mm, liczona po obwodzie   |
| 4  | pierścień wzorcowany  | 49,999 72 mm                      | średnica w płaszczyźnie symetrii prostopadłej do osi pierścienia, obrócona wokół tej osi względem kierunku oznaczonego wskazami o -1 mm, liczona po obwodzie   |
| 5  | pierścień wzorcowany  | 49,999 54 mm                      | średnica w kierunku oznaczonym wskazami położona na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny symetrii prostopadłej do osi pierścienia, przesunięta o 1 mm w górę w stosunku do płaszczyzny pomiarowej |
| 6  | pierścień wzorcowany  | 49,999 96 mm                      | średnica w kierunku oznaczonym wskazami położona na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny symetrii prostopadłej do osi pierścienia, przesuniętej o 1 mm w dół w stosunku do płaszczyzny pomiarowej |

Wyniki pomiarów można podzielić na dwie grupy: wynik pomiaru średnicy pierścienia odniesienia (pomiar nr 1), który służy do zerowania wskaźników komparatora, i wyniki pomiarów średnicy pierścienia wzorcowanego (pomiar od nr 2 do nr 6), które dają różnicę między średnicami obu pierścieni:

średnia arytmetyczna:  $\bar{\Delta l} = 49,999 54 \text{ mm}$

odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru:  $s(\Delta l) = 0,33 \mu\text{m}$

odchylenie standardowe średniej:  $s(\bar{\Delta l}) = \frac{s(\Delta l)}{\sqrt{5}} = 0,15 \mu\text{m}$



Odchylenie standardowe pojedynczego pomiaru  $s(\Delta l) = 0,18 \mu\text{m}$  obejmuje składową związaną z odchyłką kształtu wzorcowanego pierścienia oraz składową wynikającą z powtarzalności wskazań komparatora. W celu otrzymania standardowej niepewności pomiaru przypisanej do wyznaczonej wartości średniej różnicy między średnicami obu pierścieni należy też wziąć pod uwagę niepewność związaną z zerowaniem wskazania komparatora. Wartość tej składowej otrzymuje się na podstawie połączonej estymaty odchylenia standardowego  $s_p(0) = 0,25 \mu\text{m}$ , otrzymanej uprzednio dla pomiaru przeprowadzonego w takich samych warunkach pomiarowych. Obliczona wartość standardowej niepewności pomiaru związana z wyznaczoną różnicą średnic jest następująca:

$$u(\Delta l) = \sqrt{s^2(\overline{\Delta l}) + s_p^2(0)} = 0,30 \mu\text{m}$$

### S13.10 Budżet niepewności ( $d_x$ )

| symbol wielkości | estymata wielkości | niepewność standardowa | rozkład prawdopodobieństwa | współczynnik wrażliwości | udział niepewności   |
|------------------|--------------------|------------------------|----------------------------|--------------------------|----------------------|
| $X_i$            | $x_i$              | $u(x_i)$               |                            | $c_i$                    | $u_i(y)$             |
| $d_s$            | 40,000 7 mm        | 0,10 $\mu\text{m}$     | normalny                   | 1,0                      | 0,10 $\mu\text{m}$   |
| $\Delta l$       | 49,999 55 mm       | 0,30 $\mu\text{m}$     | normalny                   | 1,0                      | 0,30 $\mu\text{m}$   |
| $\delta l_i$     | 0,0 mm             | 0,22 $\mu\text{m}$     | prostokątny                | 1,0                      | 0,22 $\mu\text{m}$   |
| $\delta l_T$     | 0,0 mm             | 0,15 $\mu\text{m}$     | normalny                   | 1,0                      | 0,15 $\mu\text{m}$   |
| $\delta l_P$     | 0,000 004 mm       | 0,0065 $\mu\text{m}$   | prostokątny                | 1,0                      | 0,0065 $\mu\text{m}$ |
| $\delta l_E$     | 0,0 mm             | 0,017 $\mu\text{m}$    | prostokątny                | 1,0                      | 0,017 $\mu\text{m}$  |
| $\delta l_A$     | 0,0 mm             | 0,012 $\mu\text{m}$    | prostokątny                | 1,0                      | 0,012 $\mu\text{m}$  |
| $d_x$            | 90,000 25 mm       |                        |                            |                          | 0,411 $\mu\text{m}$  |

### S13.11 Niepewność rozszerzona

$$U = k \cdot u(d_x) = 2 \cdot 0,411 \mu\text{m} \cong 0,9 \mu\text{m}$$

### S13.12 Zapis wyniku pomiaru

Średnica pierścienia wzorcowego wynosi  $(90,000\ 3 \pm 0,000\ 9)$  mm.

Podaną rozszerzoną niepewność pomiaru wyrażono jako standardową niepewność pomiaru pomnożoną przez współczynnik rozszerzenia  $k = 2$ , która to wartość w przypadku rozkładu normalnego odpowiada prawdopodobieństwu rozszerzenia ok. 95 %.

### S13.13 Uwagi dotyczące podstaw matematycznych zagadnienia niewspółosiowości

Ponieważ nie jest możliwa dokładna regulacja położenia pierścieni względem osi pomiarowej komparatora, wielkość, której wartość wyznacza się w czasie pomiaru, jest cięciwą określonego pierścienia położoną w pobliżu jego średnicy. Długość  $d'$  tej cięciwy, określana podczas pomiaru, jest związana ze średnicą pierścienia  $d$  za pomocą następującego równania:

$$d' = d \cdot \cos(\delta\varphi) \cong d \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(\delta\varphi)^2\right) \quad (\text{S13.6})$$

gdzie  $\delta\varphi$  jest małym kątem, który jest połową zakresu kąтового położenia cięciwy do średnicy. Z drugiej strony, kąt ten jest związany z małą odległością  $\delta c$  cięciwy od środka pierścienia następującą zależnością:

$$\delta c = \frac{1}{2} \cdot d \cdot \sin(\delta\varphi) \cong \frac{1}{2} \cdot d \cdot \delta\varphi \quad (\text{S13.7})$$

tak że równanie (S13.6) można przekształcić do postaci

$$d' \cong d - 2 \frac{(\delta c)^2}{D} \quad (\text{S13.8})$$

w której średnica  $d$  pierścienia w członie ilorazowym została zastąpiona przez jej wartość nominalną  $D$ . Podstawienie takie jest uzasadnione ze względu na małą wartość licznika tego ilorazu. Najlepszą estymatą średnicy jest jej wartość oczekiwana otrzymana na podstawie następującego równania:

$$d = d' + 2 \frac{u^2(\delta c)}{D} \quad (\text{S13.9})$$

Przyjęto, że wartość oczekiwana odległości  $\delta c$  wynosi zero. Należy przy tym pamiętać, że znaczenie symboli  $d$ ,  $d'$  i  $\delta c$  w równaniu (S13.8) nie jest identyczne jak w równaniu (S13.9); podczas gdy w równaniu (S13.8) symbole te reprezentują nieznanne dokładnie wielkości lub zmienne losowe, w równaniu (S13.9) oznaczają one wartości oczekiwane tych wielkości. Ponieważ wariancja zmiennej losowej jest równa wartości oczekiwanej kwadratu odchylenia tej zmiennej od jej wartości oczekiwanej, kwadrat standardowej niepewności pomiaru związanej z średnicą pierścienia wynosi, zgodnie z równaniem (S13.8)

$$u^2(d) = u^2(d') + 4 \cdot (\alpha - 1) \frac{u^4(\delta c)}{D^2} \quad (\text{S13.10})$$

gdzie

$$\alpha = \frac{m_4(\delta c)}{m_2^2(\delta c)} \quad (\text{S13.11})$$

wyraża stosunek momentu centralnego czwartego rzędu małej odległości  $\delta c$  do kwadratu momentu centralnego drugiego rzędu tej samej wielkości. Wartość tego ilorazu zależy od rozkładu prawdopodobieństwa założonego dla  $\delta c$ . Przy założeniu, że rozkład  $\delta c$  jest prostokątny, ułamek wyrażony równaniem (S13.11) przyjmuje wartość  $\alpha = 9/5$ . W tym przypadku standardowa niepewność pomiaru związana z określeniem wartości średnicy wyraża się następującym równaniem:

$$u^2(d) = u^2(d') + \frac{16}{5} \cdot \frac{u^4(\delta c)}{D^2} \quad (\text{S13.12})$$